République Démocratique du Congo

Enseignement Supérieur et Universitaire

Institut Supérieur Pédagogique de Bukavu

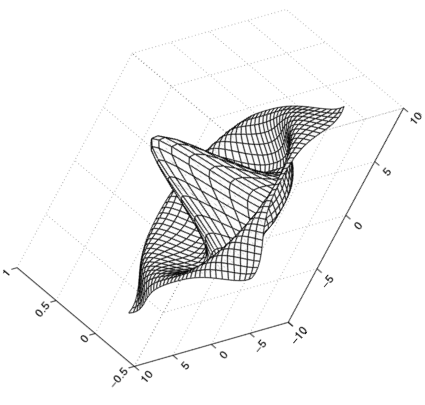
I.S.P/Bukavu

BP : 854/Bukavu

Section des Sciences Exactes

Mathématiques pour chimistes II

$y'' + ay' + by = 0$, $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$; $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$



Par

Ass. Emmanuel Kagarabi

Notes de cours destinées aux étudiants de Bac 3 *Chimie*

Code de l'UE : MAT192

Année académique 2021-2022

Contrat pédagogique

Ceci est un support de l'Unité d'Enseignement (UE) de **Mathématiques pour chimistes II** ayant comme code MAT192 avec 4 crédits. Il est réservé aux étudiants de Bac3 Chimie-Physique de l'Institut Supérieur Pédagogique de Bukavu et sera animé par l'assistant NYANDU KAGARABI Emmanuel [1] pendant le premier semestre de l'année académique 2021-2022.

Le présent Unité d'Enseignement prend en compte les notions relatives aux fonctions réelles de plusieurs variables réelles avec une restriction sur les fonctions dépendant de 2 et 3 variables réelles, aux intégrales multiples, aux équations différentielles ordinaires du premier et deuxième ordre ainsi que les notions de base sur le calcul des probabilités et les variables aléatoires. C'est ainsi qu'il permettra à l'étudiant d'acquérir des outils mathématiques nécessaires à l'analyse et à l'interprétation de phénomènes de la vie courante et plus spécialement de phénomènes physico-chimiques.

Pour mieux assimiler ce cours, l'étudiant doit connaître les notions de mathématiques pour chimistes I étudiées en Bac1 avec un accent particulier placé sur de notions capitales en Algèbre et en Analyse (calcul matriciel, étude d'une fonction réelle d'une variable réelle, calcul différentiel et intégral,...). Ces notions nous seront indispensables tout au long du cours. Il sied de signaler que la présence aux cours à l'auditoire s'avère obligatoire.

Le cours se déroulera à l'auditoire [2] et son syllabus sera mis à la disposition de chacun afin de le photocopier. Néanmoins, pour faciliter l'assimilation, les étudiants seront invités à prendre des notes manuscrites (écrites au Tableau Noir) en complément au syllabus prévu. Par ailleurs, certains manuels de base figurent dans la bibliographie et sont recommandés à chacun pour une compréhension optimale [3].

Quant aux modalités d'évaluation ; les étudiants seront soumis à des travaux diversifiés avec un minimum de 4 Travaux Dirigés côtés chacun sur 5pts, 4 Travaux Pratiques cotés chacun sur 10 pts et 2 interrogations (dont le programme sera discuté) écrites cotées chacune sur 20 pts. La totalité sera ramenée à la note moyenne des travaux journaliers et pour terminer, le cours pourra s'achever avec la passation d'un examen écrit d'une durée maximale de 3 heures. L'examen aura un maximum de 5 questions de même pondération réparties de la manière suivante : la première question portera sur des définitions s'étendant sur tout le contenu du cours et chaque chapitre étudié (les 2 derniers seront considérés comme un seul chapitre) fera l'objet d'une question. Tout ceci, pour donner la chance à tout étudiant studieux et travailleur de réussir avec au moins soixante-dix pour cent des points.

Certains passages de ce cours n'ont pas, expressément, été explicités et comportent éventuellement des trous. C'est pourquoi nous y travaillerons en grande partie à l'auditoire et je serai reconnaissant à toute personne me signalant une ou des erreurs se trouvant dans ce module ; nous ne sommes qu'au début de son élaboration. Les évaluations seront faites des exemples et exercices disponibles dans chaque chapitre. A présent, au travail et bon courage à tous !.

1. emmanuelkagarabi5@gmail.com
2. "J'écoute pour oublier, je vois pour me souvenir et je fais pour comprendre". Proverbe Chinois.
3. "En mathématiques, on ne comprend pas les choses, on s'y habitue". John Von Neuman.

Chapitre 1

Fonctions réelles à plusieurs variables réelles

Sommaire

1.1 Introduction

Jusqu'ici, on a étudié des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire des situations où une variable y dépend d'une seule variable indépendante x. Dans la pratique, il arrive souvent qu'une variable dépende de plusieurs autres. En voici un paradigme :

Exemple 1.1
Le volume V d'un cylindre dépend du rayon r et de la hauteur h. Nous avons en effet que

$$V = \pi r^2 h.$$

Nous disons alors que V est une fonction de r et h et nous écrivons simplement

$$V(r,h) = \pi r^2 h.$$

Il est bien rare que le modèle mathématique choisi par le physicien ne dépende que d'un paramètre. En Thermodynamique, par exemple, lorsque l'on considère une énergie (énergie interne U, cinétique Ec, etc.), on est souvent amené à étudier l'influence des paramètres T (température), p (pression) et V (volume). En voici quelques cas :

Exemple 1.2 (Loi de Boyle-Mariotte ou loi des gaz parfaits. (1670))

$$pV = nRT.$$

n désigne la quantité de matière contenue dans le volume V, tandis que R désigne la constante des gaz parfaits (R=8.31J/Kmol). Si le volume du système physique varie en même temps que la température, notre étude est justifiée. En général, on recherche l'équation d'état d'un système. (Relation entre les paramètres d'état d'un système en équilibre macroscopique.)

Elle s'écrit $f(p,V,T) = 0$, où f est une fonction des trois variables p, V et T. Dans notre cas, on a :

$$f(p,V,T) = pV - nRT.$$

Exemple 1.3 (Équation d'état de Van der Waals) [1]
Pour une mole de gaz, on a la relation

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V-b) = RT.$$

Cette relation traduit l'existence de forces d'interaction entre les molécules de gaz, à la différence de l'équation d'état des gaz parfaits. La fonction d'état s'écrit dans ce cas :

$$f(p,V,T) = \left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V-b) - RT.$$

Une fois qu'on a modélisé un phénomène naturel par une fonction de plusieurs variables, il faut être capable, si on veut étudier le phénomène naturel en question, de décrire le comportement de cette fonction. Tout comme il est utile de savoir étudier les fonctions d'une variable, il est utile de savoir étudier les fonctions de plusieurs variables. Nous allons ainsi apprendre à étudier les fonctions qui dépendent juste de deux, éventuellement trois variables ; cela permet d'éviter des notations et des calculs fastidieux, et toutes les idées seront déjà présentées.

1. Prix nobel de Physique, 1910

1.2 Définitions

Définition 1.1 (Fonction multivariable)
On appelle fonction numérique réelle de n variables réelles $x_1, \ldots, x_n$, toute fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \to f(x),\ x = (x_1, \ldots, x_n).$$

C'est donc une application d'une partie D de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. D est **le domaine de définition** de f ; i.e. l'ensemble des n-uplets $(x_1, \ldots, x_n)$ pour lesquels la fonction f est définie.

Définition 1.2
On dit que z est une fonction numérique de n-variables $x_1, \ldots, x_n$ si à chaque n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$ des variables indépendantes $x_1, \ldots, x_n$ prises dans le domaine de définition D, correspond une valeur bien déterminée de la variable dépendante z. On note

$$z = f(x_1, \ldots, x_n).$$

Remarque 1.1
Nous nous limiterons aux fonctions numériques réelles de 2 ou 3 variables réelles.

Exemple 1.4
(a) Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :

1. $z = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$. ***R/*** $D = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$.
2. $z = \ln(x + y)$. ***R/*** $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y > 0\}$.

(b) Déterminez le domaine de définition des fonctions suivantes et calculez $f(3, 2)$.

1. $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x + y + 1}}{x - 1}$
2. $f(x, y) = x \ln(y^2 - x)$.

Solution

1. $f(3, 2) = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$. L'expression de f a du sens lorsque le dénominateur n'est pas nul et que la quantité sous le radical est positive. Le domaine de définition de f est

$$D = \{(x, y)/x + y + 1 \geq 0,\ x \neq 1\}.$$

L'inégalité $x + y + 1 \geq 0$ ou $y \geq -x - 1$ décrit les points qui se trouvent sur la droite $y = -x - 1$ ou plus haut, tandis que $x \neq 1$ signifie que les points de la droite verticale $x = 1$ doivent être exclus du domaine de définition (voir Figure 1.1).

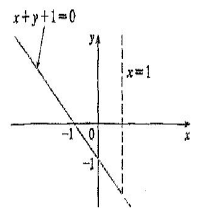


Figure 1.1 – Domaine de définition de $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x + y + 1}}{x - 1}$.

2. $f(3, 2) = 0$. Comme $\ln(y^2 - x)$ n'est définie que si $y^2 - x > 0$, le domaine de définition de f est $D = \{(x, y)/x < y^2\}$. Ces points sont situés à gauche de la parabole $x = y^2$ (voir Figure 1.2).

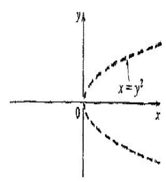


Figure 1.2 – Domaine de définition de $f(x, y) = x \ln(y^2 - x)$.

1.3 Représentation graphique

Une façon de visualiser le comportement d'une fonction de deux variables est de considérer sa représentation graphique.

Définition 1.3 (Représentation graphique)
Si f est une fonction de deux variables définie sur D, alors sa représentation graphique est l'ensemble de tous les points (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ tels que $z = f(x, y)$ et (x, y) dans D.

Le graphe S_f de f (fonction de deux variables) est l'ensemble des points de l'espace de coordonnées $(x, y, f(x, y))$ avec $(x, y) \in D$. Cela se note :

$$S_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = f(x, y), (x, y) \in D\}.$$

A chaque point $(x, y) \in D$ correspond un point sur la surface S. Voici comment on place les points dans un repère (voir Figure 1.3).

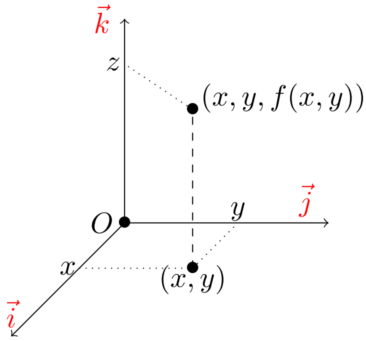


Figure 1.3 – Utilisation d'un repère à 3 dimensions.

Tout comme le graphique d'une fonction f d'une variable est une courbe d'équation $y = f(x)$, le graphique d'une fonction f de deux variables est une surface d'équation $z = f(x, y)$. Le graphique S de f se trouve juste au-dessus ou en-dessous de son domaine de définition D inclus dans le plan OXY (voir Figure 1.4).

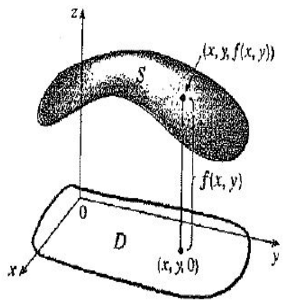


Figure 1.4

Exemple 1.5
Tracez le graphique de la fonction $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$.

Solution : L'équation du graphique de f est $z = 6 - 3x - 2y$ ou $3x + 2y + z = 6$, qui représente un plan. La partie de ce plan visible dans le premier octant est présentée dans la Figure 1.5.

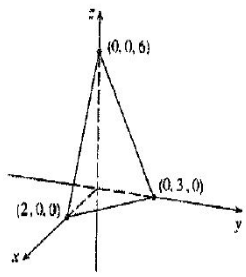


Figure 1.5

Exemple 1.6
Tracez le graphique de la fonction $f(x, y) = x^2$.

Solution : Remarquez que, quelle que soit la valeur attribuée à y, la valeur de $f(x, y)$ est toujours x^2. L'équation du graphique est $z = x^2$ et ne comprend donc pas y. Cela signifie que n'importe quel plan vertical d'équation $y = k$ (parallèle au plan de coordonnées OXZ) coupe la surface selon une courbe d'équation $z = x^2$, qui est une parabole. La FIGURE 1.6 montre comment la surface est engendrée en prenant la parabole $z = x^2$ du plan OXZ et en la faisant glisser tout le long de l'axe OY. Le graphique est donc un cylindre parabolique fait d'une infinité de copies translatées de la même parabole.

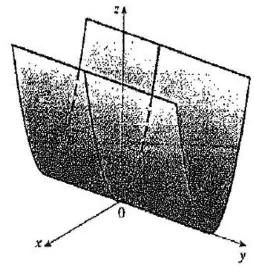
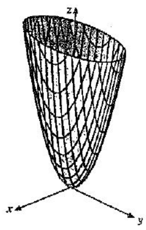


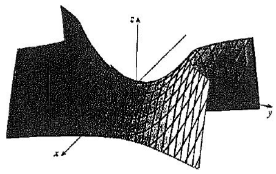
FIGURE 1.6 – Le graphique de $f(x, y) = x^2$ est le cylindre parabolique $z = x^2$.

Graphiques de quelques fonctions à deux variables

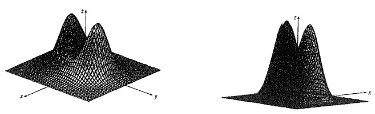
Afin de vous familiariser avec les graphes des fonctions de deux variables voici quelques exemples.



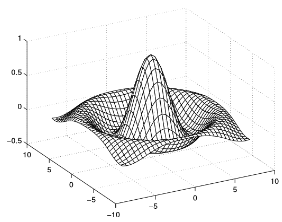
(a) Le paraboloïde $z = 4x^2 + y^2$.



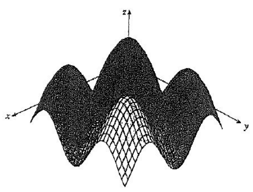
(b) Le paraboloïde $z = y^2 - x^2$.



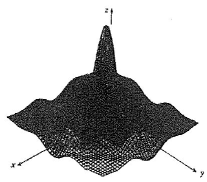
(c) $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.



(d) $f(x, y) = \dfrac{\sin(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.



(e) $f(x, y) = \sin x + \sin y$



(f) $f(x, y) = \dfrac{\sin x \sin y}{xy}$

FIGURE 1.7 – Graphiques de quelques fonctions à deux variables.

1.4 Dérivation ou différentiation

1.4.1 Accroissements partiels et total

DÉFINITION 1.4
Soient $z = f(x, y)$ une fonction numérique de deux variables réelles x et y, Δx un

accroissement de x et Δy celui de y.

- *L'accroissement partiel de z par rapport à x est : $\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x,y)$.*
- *L'accroissement partiel de z par rapport à y est : $\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x,y)$.*
- *L'accroissement total de z est : $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$.*

On a la remarque suivante :

Remarque 1.2

$$\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z.$$

Exemple 1.7

Calculer les accroissements partiels et totaux :

1. $z = 2xy$. ***R/*** $\Delta_x z = 2y\Delta x$, $\Delta_y z = 2x\Delta y$ *et* $\Delta z = 2x\Delta y + 2y\Delta x + 2\Delta x\Delta y$.
2. $z = x^2 y$. ***R/*** $\Delta_x z = 2xy\Delta z + y\Delta_x^2$, $\Delta_y z = x^2\Delta y$ *et* $\Delta z = 2xy\Delta x + y(\Delta x)^2 + x^2\Delta y + 2x\Delta x\Delta y + (\Delta x)^2\Delta y$.

1.4.2 Dérivées partielles du premier ordre

Soit une fonction numérique réelle de deux variables réelles $z = f(x,y)$.

1. On appelle dérivée partielle de z par rapport à x, la fonction notée z'_x ou $\frac{\partial z}{\partial x}$ ou $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ ou encore f'_x et définie par
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}. \tag{1.1}$$
2. De manière similaire, on définit la dérivée partielle de z par rapport à y et on a
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}. \tag{1.2}$$

Remarque 1.3

- ∗ *Le symbole ∂ introduit par JACOBI est universellement employé pour désigner une dérivée partielle.*
- ∗ *Le raisonnement est analogue pour définir les dérivées partielles du premier ordre d'une fonction à n $(n > 2)$ variables réelles.*
- ∗ *Voici les notations les plus utilisées pour représenter les dérivées partielles :*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \equiv \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\Big|_{(a,b)} \equiv \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\Big|_{x=a,y=b} \equiv f'_x(a,b),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \equiv \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\Big|_{(a,b)} \equiv \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\Big|_{x=a,y=b} \equiv f'_y(a,b).$$

Exemple 1.8

1. *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \to f(x,y) = 3x^2 + 2xy + 7$.
   On a $\frac{\partial f}{\partial x}(1,-2) = 2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,-2) = 2$
2. *Soit* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x,y,z) \to f(x,y,z) = 3x^2 z + 2z - y^2 z$.
   On a $\frac{\partial f}{\partial x} = 6xz$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -2yz$ *et* $\frac{\partial f}{\partial z} = 3x^2 + 2 - y^2$.
3. *Déterminer les dérivées partielles de la fonction* $z = x^3\cos^2 y$.

1.4.3 Dérivées partielles d'ordre supérieur

Les fonctions **dérivées partielles premières** sont définies telles que

$$D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x, y).$$

Ces fonctions étant, en général, des fonctions de deux variables, elles peuvent elles aussi admettre des dérivées partielles, qui sont alors appelées **dérivées partielles secondes** ou **dérivées partielles du second ordre**. On les note

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) &\equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \equiv f_{xx} \equiv f''_{xx} \equiv (f_x)_x,\\
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) &\equiv \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \equiv f_{yy} \equiv f''_{yy} \equiv (f_y)_y,\\
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) &\equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \equiv \frac{\partial}{\partial x}(f_y) \equiv f_{yx} \equiv f''_{yx} \equiv (f_y)_x,\\
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) &\equiv \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \equiv \frac{\partial}{\partial y}(f_x) \equiv f_{xy} \equiv f''_{xy} \equiv (f_x)_y.
\end{aligned}$$

f''_{xy} et f''_{yx} sont appelées **dérivées partielles secondes mixtes**.

Exemple 1.9
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \longrightarrow f(x, y) = 5x^2 - 2xy + 3xy^2 + x^3 - 2y$. *On a*

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x} = 10x - 2y + 3y^2 + 3x^2, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 10 + 6x, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -2 + 6y,\\
&\frac{\partial f}{\partial y} = -2x + 6xy - 2, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2 + 6y.
\end{aligned}$$

On peut constater que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x},$$

mais ce résultat n'est valable dans le cas général que si les dérivées partielles secondes sont continues. On dit, dans ce cas, que f est de **classe** $\mathcal{C}^2$. On peut alors permuter l'ordre des dérivées partielles.

Théorème 1.1 (Théorème de Clairaut)
On suppose que f est définie sur un disque D contenant le point (a,b). Si les fonctions f''_{xy} et f''_{yx} sont toutes les deux continues sur D, alors

$$f''_{xy}(a, b) = f''_{yx}(a, b). \tag{1.3}$$

1.4.4 Applications des dérivées partielles

1.4.4.1 Les équations aux dérivées partielles

Les dérivées partielles interviennent dans des *équations aux dérivées partielles* qui traduisent certaines lois de la physique. Par exemple, l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{1.4}$$

est connue sous le nom d'**équation de Laplace**, en l'honneur du marquis Pierre de Laplace (1749-1827). Les solutions de cette équation sont les **fonctions harmoniques** qui jouent un rôle dans les problèmes de conduction de chaleur, d'écoulement des fluides et de potentiel électrique.

EXEMPLE 1.10
Démontrer que la fonction $u(x,y) = e^x \sin y$ est une solution de l'équation de Laplace.

Solution : $u''_{xx} + u''_{yy} = 0$. Par conséquent, u satisfait à l'équation de Laplace.

1.4.4.2 L'équation d'ondes

L'équation d'ondes est la suivante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1.5}$$

Elle décrit le mouvement ondulatoire, qu'il s'agisse d'une vague dans l'océan, d'une onde sonore, d'une onde lumineuse ou d'une onde qui voyage le long d'une corde. Par exemple, si $u(x,t)$ représente le déplacement de la corde (comme dans la FIGURE 1.8), $u(x,t)$ satisfait à l'équation des ondes. La constante a dépend de la densité de la corde et de sa tension.

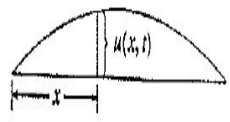


FIGURE 1.8

EXEMPLE 1.11
Vérifier que la fonction $u(x,t) = \sin(x - at)$ est une solution de l'équation des ondes.

Solution : $u''_{tt} = -a^2 \sin(x - at) = a^2 u''_{xx}$. Aussi, u satisfait à l'équation des ondes.

1.4.5 Les différentielles-Application au calcul des erreurs

1.4.5.1 Les différentielles

Rappel à une variable : Dans le cas d'une fonction d'une seule variable $y = f(x)$, la différentielle dx est définie comme une variable indépendante, c'est-à-dire que dx peut prendre n'importe quelle valeur réelle. La différentielle de y est ensuite définie par

$$dy = f'(x)dx. \tag{1.6}$$

Généralisation :
Dans le cas d'une fonction de deux variables $z = f(x,y)$, les **différentielles** dx et dy sont définies comme des variables indépendantes, qui peuvent donc prendre n'importe quelles valeurs réelles. La **différentielle** dz, dite aussi la **différentielle totale**, est définie par

$$dz = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy. \tag{1.7}$$

De façon analogue, on définit la différentielle totale d'une fonction de plus de trois variables réelles

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i, \text{ avec } z = f(x_1, \ldots, x_n). \tag{1.8}$$

EXEMPLE 1.12

1. (a) *Quelle est l'expression de dz pour $z = f(x,y) = x^2 + 3xy - y^2$;*
   R/ $dz = (2x + 3y)dx + (3x - 2y)dy$.

(b) *Comparez dz et Δz si x passe de 2 à 2.05 et y passe de 3 à 2.96.*
R/ *Les substitutions $x = 2$, $dx = \Delta x = 0.05$, $y = 3$ et $dx = \Delta y = -0.04$ conduisent à $dz = 0.65$.*
La variation de z est égale à $\Delta z = f(2.05, 2.96) - f(2,3) = 0.6449$.
On note que $\Delta z \approx dz$ mais dz est plus facile à calculer.

2. *Calculer la dérivée totale de chacune des fonctions suivantes : $z = xy$, $z = x^3 \cos y$ et $u = e^{x^2+y^2} \cos^2 z$.*

1.4.5.2 Application au calcul des erreurs

Lorsque nous faisons des mesures nous effectuons des erreurs dues à la précision des outils dont nous disposons. Il faut donc faire une distinction entre valeur **exacte** (théorique) et valeur **approchée** (obtenue par la pratique). Par exemple, supposons que nous mesurons le côté d'un carré. On obtient par une mesure 9,98 mètres et nous savons que nos appareils de mesure donne une précision à 0,05 mètres près. Cependant la mesure exacte est de 10 mètres. Il existe donc une différence entre valeur mesurée et valeur exacte. Dans notre cas, cette erreur est de 0,02 mètres. C'est dans ce genre d'applications que le calcul des différentielles totales s'avère pratiquement le plus utile. On désire déterminer une grandeur u liée algébriquement à plusieurs autres variables x, y, z mesurées **expérimentalement**. Soient $u = f(x, y, z)$ cette fonction et x_m, y_m, z_m les meilleures valeurs expérimentales de x, y, z ; ce sont les valeurs moyennes de la série des déterminations de x, y, z. Pour marquer l'existence d'erreurs, les résultats obtenus pour x, y, z sont désignés de la manière suivante :

$$x_m \pm \Delta x_m, \quad y_m \pm \Delta y_m, \quad z_m \pm \Delta z_m.$$

Δx_m, Δy_m et Δz_m représentent les écarts possibles, en ce sens qu'on estime qu'une répétition des mesures donnerait des valeurs le plus souvent comprises entre

$$\begin{aligned} &x_m - \Delta x_m \text{ et } x_m + \Delta x_m \text{ pour } x,\\ &y_m - \Delta y_m \text{ et } y_m + \Delta y_m \text{ pour } y,\\ &z_m - \Delta z_m \text{ et } z_m + \Delta z_m \text{ pour } z. \end{aligned}$$

Le problème est de trouver l'erreur sur u, et de déterminer les écarts possibles pour u.

Puisque les Δx, Δy, Δz sont supposés petits, Δu sera calculé par la théorie des différentielles ; on obtient ainsi la **partie principale** de l'erreur. On écrit

$$\Delta u \approx du = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \Delta y + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right| \Delta z. \tag{1.9}$$

Ensuite, dans cette dernière équation, on remplace x, y, z par x_m, y_m, z_m et Δx, Δy, Δz par Δx_m, Δy_m, Δz_m. On détermine ainsi Δu_m qui est l'erreur sur $u_m = f(x_m, y_m, z_m)$.

Plus généralement, on aura pour une fonction de plusieurs variables $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$$\Delta f = \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| \Delta x_1 + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right| \Delta x_2 + \cdots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right| \Delta x_n. \tag{1.10}$$

Pour savoir si une erreur est grande ou pas, on regarde quelle proportion, quel pourcentage elle représente par rapport à f(x).

Définition 1.5 (Erreur relative)
On appelle erreur relative (Er) le quotient :

$$\frac{\Delta f}{|f(x)|}. \tag{1.11}$$

Ce nombre s'exprime en % ; Er $= \left(\frac{\Delta f}{|f(x)|} \times 100\right)$%.

L'application de la **propagation des incertitudes** décrite par la formule générale (1.10) devient particulièrement simple dans les cas particuliers suivants, souvent rencontrés en pratique :

Propriété 1.1 (Quelques propriétés relatives aux incertitudes)

1. ***Somme/différence***
   Lorsque la grandeur composée n'est constituée que de sommes ou de différences :

$$f(x) = x_1 \pm x_2 \pm \cdots \pm x_n, \text{ alors } \Delta f = \Delta x_1 + \cdots + \Delta x_n. \tag{1.12}$$

   Dans une somme (différence), les erreurs absolues s'additionnent.

2. ***Produit/quotient***
   Lorsque la grandeur composée n'est constituée que de produits ou de quotients :

$$f(x) = x_1 \cdot x_2/x_3 \cdots x_n, \text{ alors } \frac{\Delta f}{|f(x)|} = \frac{\Delta x_1}{|x_1|} + \cdots + \frac{\Delta x_n}{|x_n|}. \tag{1.13}$$

   Dans un produit (quotient), les erreurs relatives s'additionnent.

3. ***Produit de puissances***
   Lorsque la grandeur composée n'est constituée que d'un produit de puissances

$$f(x) = x_1^{\mu_1} \cdot x_2^{\mu_2} \cdots x_n^{\mu_n}, \text{ alors } \frac{\Delta f}{|f(x)|} = |\mu_1|\frac{\Delta x_1}{|x_1|} + \cdots + |\mu_n|\frac{\Delta x_n}{|x_n|}. \tag{1.14}$$

Dans tous les autres cas (par ex. en présence de relations trigonométriques, de logarithmes, de racines, etc), la formule générale (1.10) *doit être utilisée en calculant toutes les dérivées partielles.*

Exemple 1.13
Une série de mesures des deux cotés d'un triangle donne, en moyenne, 15 *et* 20 *mètres, et l'angle qu'ils déterminent vaut* $60°$ *en moyenne. Si on estime à* ± 0.2 *mètre, l'erreur sur la mesure des côtés, et* $\pm 1°$ *l'erreur sur l'amplitude de l'angle, quelles sont les erreurs absolue et relative sur l'aire du triangle ?.*

Solution :

$$S = \frac{1}{2} xy \sin\theta$$

La différentielle totale est

$$dS = \left|\frac{\partial S}{\partial x}\right| dx + \left|\frac{\partial S}{\partial y}\right| dy + \left|\frac{\partial S}{\partial \theta}\right| d\theta$$

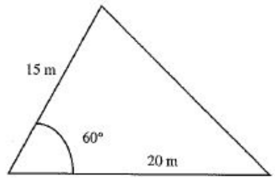


FIGURE 1.9 – Les variables indépendantes sont x, y, θ.

où
$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{1}{2} y \sin\theta, \; \frac{\partial S}{\partial y} = \frac{1}{2} x \sin\theta, \; \frac{\partial S}{\partial \theta} = \frac{1}{2} xy \cos\theta.$$
En remplaçant x, y, dx, dy, $d\theta$ par les valeurs suivantes : $x = 15, y = 20$, $\theta = 60°$ou $\frac{\pi}{3}$radians, $dx = 0.2$, $dy = 0.2$, $d\theta = 1°$ou $\frac{\pi}{180}$radians (seule la valeur en radians est admise car les fonctions trigonométriques ont des arguments qui s'expriment en radians), on a

$$dS = \left|\frac{1}{2}(20)\sin\frac{\pi}{3}\right|(0.2) + \left|\frac{1}{2}(15)\sin\frac{\pi}{3}\right|(0.2) + \left|\frac{1}{2}(15)(20)\cos\frac{\pi}{3}\right|\left(\frac{\pi}{180}\right) = 4.33m^2.$$

L'erreur absolue vaut donc $\pm 4.33m^2$.

Pour finir, l'erreur relative exprimée en pour-cents se calcule alors de la façon suivante :

$$Er = \left(\frac{dS}{|S|} \times 100\right)\% = 3.3\%.$$

L'erreur relative vaut $\pm 3,3\%$.

1.4.6 Dérivation des fonctions composées

1.4.6.1 Différentielle totale

Soit $u = f(x, y)$ une fonction numérique de deux variables réelles x et y. Supposons que x et y ne soient pas de variables indépendantes, mais dépendent, par exemple, d'une troisième variable t. On a $x = \varphi(t)$ et $y = \psi(t)$. Alors $u = f(x, y) = f[\varphi(t), \psi(t)]$: fonction composée ; u est donc une fonction d'une seule variable t. Dès lors,

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \tag{1.15}$$

Généralement
$$\frac{du}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}; \; x_i = \varphi_i(t). \tag{1.16}$$

En particulier si $t = x$, alors y est une fonction de x et u devient une fonction d'une seule variable x ; ce qui donne
$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx}. \tag{1.17}$$

De même si y et z sont des fonctions de x et $u = f(x, y, z)$, alors

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dx}. \tag{1.18}$$

1.4.6.2 Dérivées partielles

Supposons que dans $u = f(x, y)$, x et y soient des fonctions de deux variables indépendantes r et s : $x = \varphi(r, s)$ et $y = \psi(r, s)$. Alors les dérivées partielles de u respectivement aux nouvelles variables r et s peuvent être fournies par l'expression (1.15) :

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dr} \text{ et } \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{ds}. \tag{1.19}$$

En effet, si s reste fixe (resp. r), x et y sont des fonctions d'une seule variable r (resp. s). Toutes les dérivées sont donc partielles.

Exemple 1.14

1. *Calculer* $\frac{\partial u}{\partial x}$ *pour* $z = x^2 + \sqrt{y}$, $y = \sin x$.
2. *Calculez* dz/dt *en* $t = 0$ *pour* $z = x^2y + 3xy^4$, *si* $x = \sin 2t$ *et* $y = \cos t$. ***R/*** *6.*

Exemple 1.15
La pression P (en kilo pascals), le volume V (en litres) et la température T (en kelvins) d'une mole d'un gaz idéal sont liés par l'équation

$$PV = 8.31T.$$

Déterminez la vitesse à laquelle la pression change quand la température est de $300K$ *et est en train d'augmenter à raison de* $0.1K/s$ *et quand le volume est de* $100L$ *et est entrain de croître à raison de* $0.2L/s$.

Solution : La pression est entrain de diminuer d'environ $0.042kPa/s$.

1.4.7 Dérivation des fonctions implicites

L'équation $f(x, y) = 0$ définit l'une des variables x ou y comme fonction implicite de l'autre. C'est la forme que prend une équation quelconque en x et y quand tous les termes ont été transposés dans le 1er membre. Posons $u = f(x, y)$ telle que y est une fonction arbitraire continue de x. Par la relation (1.17), on a $\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}$. Si nous considérons y comme une fonction de x telle que $f(x, y) = 0$, alors $u = 0$ et $du = 0$. Par suite,

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}},\ \frac{\partial f}{\partial y} \neq 0; \tag{1.20}$$

c'est la formule de dérivation des **fonctions implicites**.

Considérons maintenant une fonction $f(x, y, z) = 0$ définissant z comme une fonction implicite de x et y. Pour calculer les dérivées partielles de z par rapport à x et à y, on a tout simplement

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}} \text{ et } \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}. \tag{1.21}$$

Exemple 1.16

1. *Calculer y' pour $x^3 + y^2x - 3 = 0$.*
2. *Calculez l'expression de y' si $x^3 + y^3 = 6xy$.*
3. *Calculez z'_x et z'_y pour $e^z + x^2y + z = -5$.*

1.4.8 Fonctions homogènes

1.4.8.1 Définition

Définition 1.6
Une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x = (x_1, \ldots, x_n) \to f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ est dite homogène de degré α si, lorsqu'elle est définie au point x, elle l'est aussi au point $\lambda x (\lambda \in \mathbb{R}^*)$ et si

$$f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x);\ i.e.\ f(\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n) = \lambda^\alpha f(x_1, \ldots, x_n). \tag{1.22}$$

Exemple 1.17
$f(x, y) = \sqrt{2x + y}$ *est homogène de degré* $\frac{1}{2}$ *et* $g(x, y) = \frac{x^2y^2}{3x^4+2y^4}$ *est homogène de degré* 0.

1.4.8.2 Propriétés des dérivées partielles

Soit f une fonction de n variables $x_1, \ldots, x_n$ homogène de degré α et admettant des dérivées partielles. De la relation $f(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_p, \ldots, \lambda x_n)$, on déduit, en dérivant par rapport à x_p et en utilisant la dérivation de fonctions composées :

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial x_p}(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^\alpha \frac{\partial f}{\partial x_p}(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n);\ \text{i.e.}\ \frac{\partial f}{\partial x_p} = \lambda^{\alpha-1} \frac{\partial f}{\partial x_p}(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n). \tag{1.23}$$

D'où la proposition suivante

Proposition 1.1
Si une fonction homogène de degré α admet des dérivées partielles de 1er ordre, alors ces dernières sont aussi homogènes mais de degré $\alpha - 1$.

Théorème 1.2 (Théorème d'EULER)
Une fonction f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ est homogène et de degré α ssi elle vérifie la relation d'EULER.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = \alpha f(x),\ x = (x_1, \ldots, x_n). \tag{1.24}$$

Exemple 1.18
Vérifier le théorème d'EULER pour les fonctions suivantes :

$$f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 \ \text{ et } \ f(x, y) = xy \sin\left(\frac{y}{x}\right).$$

1.4.9 Dérivées partielles et totales d'ordre supérieur à un

1.4.9.1 Dérivées partielles

Définition 1.7
Une fonction f dont toutes les dérivées partielles jusqu'à l'ordre k sont définies et continues dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ est dite de classe $\mathcal{C}^k$ dans Ω. On dit que f est $\mathcal{C}^k$-continûment différentiable.

Théorème 1.3 (Théorème de SCHWARTZ)
Soit f une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Si elle admet au point $x \in \mathbb{R}^n$ des dérivées partielles continues $\dfrac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}$ et $\dfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$ $(i \neq j)$, alors

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}. \tag{1.25}$$

Il résulte de ce théorème que si une fonction f de n variables admet des dérivées partielles successives continues, alors l'ordre de dérivation relativement aux différentes variables n'importe pas ; i.e. il peut changer comme on le veut.

En particulier pour $z = f(x, y)$, on a $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Il s'ensuit que si les dérivées partielles $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^{n-k}}$ et $\dfrac{\partial^n f}{\partial y^{n-k} \partial x^k}$ sont définies et continues, alors

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^{n-k}} = \frac{\partial^n f}{\partial y^{n-k} \partial x^k}. \tag{1.26}$$

1.4.9.2 Différentielles totales

Soit $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ une fonction de n variables. Par définition, on a

$$du = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

On a donc que

$$d^2u = d(du) = d\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\right).$$

En particulier pour $u = f(x, y)$, on a

$$d^2u = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dydx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2.$$

Si les dérivées partielles sont définies continues, on a

$$d^2u = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u.$$

On en déduit que si les dérivées partielles sont définies et continues, alors

$$d^n u = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^n u. \tag{1.27}$$

Exemple 1.19
Calculer d^2u pour $u = e^{xy}$.

1.4.10 Vecteur gradient et dérivée partielle suivant une direction

Définition 1.8
Si f est une fonction de n variables $x_1, \ldots, x_n$; alors le gradient de f est un vecteur noté $\overrightarrow{\nabla f}$ ou $\overrightarrow{gradf}$ et défini par

$$\overrightarrow{\nabla f} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) \text{ ou } \overrightarrow{\nabla f} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\vec{e}_i. \tag{1.28}$$

En particulier, $\overrightarrow{\nabla f(x,y)} = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\vec{i} + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\vec{j}$.

Définition 1.9
Considérons un vecteur unitaire[2] $\vec{u}(\| \vec{u} \| = 1)$. *La dérivée partielle de f suivant la direction du vecteur $\vec{u}$ est donnée par le produit scalaire suivant*

$$D_{\vec{u}f(x,y)} = f'_{\vec{u}} = \overrightarrow{\nabla f} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{grad} \cdot \vec{u}. \tag{1.29}$$

Exemple 1.20

1. *Calculer la dérivée de $f(x,y) = x^3 - 3xy + 4y^2$ dans la direction de $\vec{u} = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$.*
2. *Trouvez le gradient de $f(x,y) = 3x^2y$ au point $(1,2)$. Utilisant ce résultat, calculez la dérivée directionnelle de f en $(1,2)$ dans la direction du vecteur $\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$.*
3. *Déterminez la dérivée de la fonction $f(x,y) = x^2y^3 - 4y$ au point $(2,-1)$ dans la direction du vecteur $\vec{v} = 2\vec{i} + 5\vec{j}$.*

Définition 1.10
*Soit f une fonction réelle de n variables $x_1, \ldots, x_n$. Le **laplacien de f**, noté Δf ou $\nabla^2 f$, est défini par*

$$\nabla^2 f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}. \tag{1.30}$$

En particulier, lorsque $n = 2$ (f : fonction réelle de 2 variables x et y) :

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \tag{1.31}$$

2. A titre de rappel, le produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ est donné par

$$< u, v >= u \cdot v = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = u^t v = v^t u \in \mathbb{R}$$

et pour $u \in \mathbb{R}^n$, sa norme euclidienne par exemple, est donnée par

$$\|u\| = \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^2\right) \frac{1}{2}.$$

1.5 Optimisation

Un problème d'optimisation se définit comme la recherche du minimum ou du maximum (de l'optimum donc) d'une fonction donnée. On peut aussi trouver des problèmes d'optimisation pour lesquels les variables de la fonction à optimiser sont contraintes d'évoluer dans une certaine partie de l'espace de recherche ; dans ce cas, on a une forme particulière de ce qu'on appelle **problème d'optimisation sous contraintes**.

En d'autres termes, le problème d'optimisation consiste à déterminer les variables de décision conduisant aux meilleures conditions de fonctionnement du système. (ce qui revient à **maximiser** ou à **minimiser** la fonction coût) tout en respectant les contraintes d'utilisation.

Ainsi le problème se note

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) \tag{1.32}$$

ou

$$\max_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) \tag{1.33}$$

selon qu'on cherche à minimiser ou respectivement à maximiser le système considéré.

Dans beaucoup de cas, l'attention est souvent plus spécifiquement focalisée sur les méthodes de **minimisation** d'une fonction étant donné que la **maximisation** découle de la minimisation de -f.

D'où

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) = -\max_{x\in\mathbb{R}^n} \left(-f(x)\right) \tag{1.34}$$

ou encore

$$\max_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) = -\min_{x\in\mathbb{R}^n} \left(-f(x)\right).$$

1.5.1 Maxima et minima d'une fonction de deux variables

1.5.1.1 Définitions

DÉFINITION 1.11 (VOISINAGE D'UN POINT)
On appelle voisinage d'un point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ toute partie du plan contenant un disque de centre (x_0, y_0) et de rayon strictement positif.

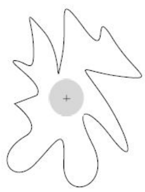


FIGURE 1.10 – Un exemple de voisinage d'un point.

On peut remarquer qu'une partie du plan est un voisinage d'un point lorsque ce point se trouve à l'intérieur de cette partie. Autrement dit, un ensemble n'est pas un voisinage d'un point lorsque le point ne se trouve pas dans cet ensemble ou bien lorsque le point se situe sur le bord de l'ensemble considéré.

DÉFINITION 1.12
Soit f une fonction de deux variables x, y définie sur une partie $D \subset \mathbb{R}^2$ et $(x_0, y_0) \in D$. On dit que $f(x, y)$ admet

- ⋆ *un **maximum global** en un point* (x_0, y_0) *si* $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$, $\forall(x, y) \in D$.
- ⋆ *un **maximum local** en un point* (x_0, y_0) *si* $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ *pour tous les points* (x, y) *voisins de* (x_0, y_0).

  Près d'un tel point, le graphe de f *est semblable à celui de la* FIGURE *1.11.*
- ⋆ *un **minimum global** en un point* (x_0, y_0) *si* $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$, $\forall(x, y) \in D$.
- ⋆ *un **minimum local** en un point* (x_0, y_0) *si* $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ *pour tous les points* (x, y) *voisins de* (x_0, y_0).

  Près d'un tel point, le graphe de f *est semblable à celui de la* FIGURE *1.12.*

*Le maximum et le minimum d'une fonction sont ses **extrema**.*

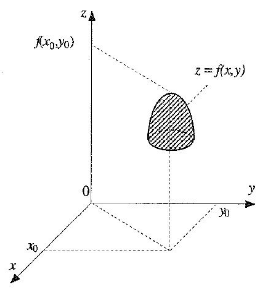


FIGURE 1.11 – f admet un maximum local en (x_0, y_0)

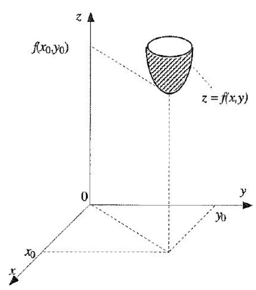


FIGURE 1.12 – f admet un minimum local en (x_0, y_0)

Les deux théorèmes qui suivent permettent de déterminer les maxima et minima locaux.

THÉORÈME 1.4
Soit f une fonction de deux variables réelles dont les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent. Si cette fonction admet un **maximum** ou un **minimum local** au point (x_0, y_0), alors

$$\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = 0$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0. \tag{1.35}$$

PROPOSITION 1.2
Si f possède un extremum relatif en (x_0, y_0) alors :

– soit $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.

– soit l'une des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ n'existe pas.

DÉFINITION 1.13 (POINT CRITIQUE)
Un point (x_0, y_0) *vérifiant l'une de ces conditions s'appelle un **point critique** ou **point stationnaire**.*

1.5.1.2 Remarques

Précisons que la condition (1.35) est **nécessaire** mais n'est pas **suffisante** pour que (x_0, y_0) soit un maximum ou un minimum local.

On a en fait déjà rencontré une situation analogue dans le cas d'une fonction d'une variable réelle : l'annulation de la dérivée en un point n'est également qu'une condition nécessaire pour que ce point soit un maximum ou un minimum. Ceux-ci sont détectés grâce à l'étude de la dérivée seconde.

Dans le cas d'une fonction de deux variables, il faudra également avoir recours aux dérivées du second ordre pour déterminer les maxima et les minima locaux. Le théorème suivant fournit une marche à suivre.

THÉORÈME 1.5
Soit f une fonction de deux variables réelles dont les dérivées partielles du premier et second ordre existent et sont continues.

Soit (x_0, y_0) un point tel que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

On définit le **hessien**

$$H(x_0, y_0) = \det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{bmatrix}. \tag{1.36}$$

- Si $H(x_0, y_0) > 0$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$, alors f admet un **minimum local** en (x_0, y_0).
- Si $H(x_0, y_0) > 0$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$, alors f admet un **maximum local** en (x_0, y_0).
- Si $H(x_0, y_0) < 0$, alors le point (x_0, y_0) ne correspond ni à un maximum local ni à un minimum local ; il s'agit d'un **point selle**.
- Si $H(x_0, y_0) = 0$, alors il peut ne pas exister d'extremum (dans ce cas, l'étude doit-être plus détaillée en prenant, par ex, un nombre plus élevé de termes dans la formule de TAYLOR ou un autre procédé).

EXEMPLE 1.21
Déterminer les extrema locaux de $f(x, y) = -3x^2 + xy - y^2 - 7x$.

R/ f admet un maximum local au point $(-\frac{14}{11}, -\frac{7}{11})$.

EXEMPLE 1.22
Recherchez les extrema locaux et les points-selles de $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.

R/ f admet $(0, 0)$ comme un point-selle et $(1, 1)$ et $(-1, -1)$ comme minima locaux.

1.5.2 Extrema des fonctions soumises à certaines contraintes : extrema liés

Dans le cas le plus simple, l'extremum lié d'une fonction $f(x, y)$ est, par définition, le maximum ou le minimum de cette fonction, atteint sous la condition que les variables x et y sont liées par l'équation $\Psi(x, y) = 0$ (équation de liaison).

Pour déterminer l'extremum lié en présence de la relation $\Psi(x, y) = 0$:

1. On forme l'équation auxiliaire

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda\Psi(x, y) \tag{1.37}$$

   appelée **équation de LAGRANGE** ou **le lagrangien** ou **fonction lagrangienne** ; avec λ un facteur constant indéterminé appelé **multiplicateur de Lagrange** ;
2. On cherche l'extremum ordinaire de la fonction $F(x, y)$: la condition nécessaire de l'existence de l'extremum donne un système de trois équations à trois inconnues x, y et λ

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda\dfrac{\partial \Psi}{\partial x} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda\dfrac{\partial \Psi}{\partial y} = 0 \\ \\ \Psi(x, y) = 0 \end{cases}$$

   qu'il faut déterminer.

Exemple 1.23
Déterminer l'extremum de $z = 6 - 4x - 3y$ avec la condition que x et y vérifient $x^2 + y^2 = 1$.

R/ Pour $\lambda = \frac{5}{2}$; la fonction admet un minimum en $M_1(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ et pour $\lambda = -\frac{5}{2}$; la fonction admet un maximum en $M_2(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$.

1.6 Exercices

Exercice 1.1
Déterminer et au besoin représenter le plus grand domaine de définition possible pour les fonctions suivantes :

1. $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x}y}{x^2 + y^2}$,
2. $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x + y + 1}}{x - 1}$,
3. $f(x, y) = \ln(xy)$,
4. $f(x, y) = x\ln(y^2 - x)$,
5. $f(x, y) = \sqrt{4x - x^2 + 4y - y^2}$,
6. $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}\ln(x^2 + y^2 - 9)$.

Exercice 1.2
Soit $f : D \to \mathbb{R} : (x, y) \to z = 3x^2 - xy$.

1. Calculez Δz pour des accroissements Δx et Δy des variables indépendantes x et y.
2. Calculez dz.
3. Que valent Δz et dz lorsque (x, y) passe de $(1, 2)$ à $(1.01, 1.98)$?

Exercice 1.3
On rappelle la loi de Boyle Mariotte, valable pour une mole de gaz parfait : $PV = RT$, où P désigne la pression du gaz, V son volume, R la constante des gaz parfaits et T la température du milieu.

1. Calculer $\frac{\partial P}{\partial T}$ et $\frac{\partial P}{\partial V}$.

2. Même question si l'on considère à présent la relation de Van der Waals, avec les mêmes conventions que précédemment, et avec a et b réels :
$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT.$$
3. Déduire de la loi de Mariotte $PV = nRT$, la relation suivante :
$$\frac{\partial V}{\partial T} \times \frac{\partial T}{\partial P} \times \frac{\partial P}{\partial V} = -1.$$

EXERCICE 1.4
Soit $f(x, t) = \sin(x - ct)$, où $c \in \mathbb{R}$. Montrer que
$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \text{ (Equation des ondes).}$$

EXERCICE 1.5
Le rayon de la base d'un cône circulaire droit mesure 10cm et la hauteur, 25 cm, avec une incertitude de 0.1cm, sur chaque mesure. Estimez, à l'aide des différentielles, l'incertitude sur le volume du cône calculé sur ces valeurs.

EXERCICE 1.6
On mesure une longueur l en mètres et on obtient $l = 50 \pm 0,1$ mètres. Cela signifie que la longueur mesurée est de 50 mètres et que la précision de la mesure est de 0,1 mètre. Un coureur parcourt cette distance en $t = 5,8 \pm 0,01$ secondes. (Le temps mesuré est de $5,8$ secondes et la précision de cette mesure est de $0,01$ secondes.)

1. Calculer la vitesse moyenne du coureur sur ce parcours.
2. Donner une estimation de l'erreur absolue commise à partir de ces mesures.
3. Calculer l'erreur relative commise à partir de ces mesures.

EXERCICE 1.7
On considère un cercle de rayon R. On note S l'aire du disque ainsi délimité. On a $R = 10,0 \pm 0,1$ m . Calculer l'ordre de grandeur de l'erreur absolue et l'erreur relative commise sur S.

EXERCICE 1.8
Un sac contient $1,1 \pm 0,03$ kg de bonbons. Pour estimer le nombre de bonbons présents dans le sac, on pèse un bonbon au hasard et on obtient 15 ± 2 g. On suppose que tous les bonbons sont identiques. Calculer le nombre total de bonbons avec une estimation de l'incertitude absolue et relative.

EXERCICE 1.9
On mesure un cube de béton. La mesure d'un côté est $l = 10$cm et la masse $m = 2,2$kg. Nos appareils de mesure nous indiquent $\Delta l = 0,1$cm et $\Delta m = 0,1$kg.

1. Calculer la masse volumique de ce béton en $kg.m^{-3}$.
2. Calculer une estimation de l'erreur absolue commise avec ces mesures.
3. Calculer une estimation de l'erreur relative commise avec ces mesures.

Exercice 1.10
Un ballon atmosphérique est lâché au niveau de la mer à une distance R du centre d'un ouragan. Son altitude augmente au fur et à mesure qu'il s'approche du centre. L'altitude h qu'il atteindra au centre de l'ouragan peut être approximé par

$$h = \pi^2 g \frac{R^4}{C^2}$$

où g est la constante de gravitation ; C est un facteur météorologique appelé **circulation de la vitesse du vent**. Si l'erreur (relative) maximale en pourcentage des mesures de R et h est respectivement $\pm 2\%$ et de $\pm 5\%$, évaluez l'erreur maximale (relative) en pourcentage de C.

Exercice 1.11
Si $u = (x-y)(y-z)(z-x)$, alors montrer que

$$\frac{\partial u}{x} + \frac{\partial u}{y} + \frac{\partial u}{z} = 0.$$

Exercice 1.12
Soit une fonction $g(s,t) = f(s^2 - t^2, t^2 - s^2)$ avec f différentiable, monter que g vérifie l'équation

$$t\frac{\partial g}{\partial s} + s\frac{\partial g}{\partial t} = 0.$$

Exercice 1.13
Calculer le gradient de chacune de fonctions suivantes au point indiqué :

1. $f(x,y) = \sin x + e^{xy}$ au point $(0,1)$.
2. $f(x,y,z) = x^2y + xy^2 + xyz^2$ au point $1, 0, -1$.

Exercice 1.14
On donne la fonction $f(x,y,z) = x\sin(yz)$

1. Déterminer le gradient de f.
2. Calculer la dérivée de f en $(1,3,0)$ dans la direction du vecteur $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$.

Exercice 1.15
Étudier les extrema pour chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = 64x - 2x^2 + 4xy - 4y^2 + 32y - 14$
2. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 3x - 2y + 1$
3. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.
4. $f(x,y) = 6 - 4x - 3y$ sous contrainte $x^2 + y^2 = 1$
5. $z = 3x^2 + y^2$ sous contrainte $2x + y = 1$
6. $z = x^2 + y^2$ pour $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 1$
7. $z = \cos^2 x + \cos^2 y$ pour $y - x = \frac{\pi}{4}$
8. $y = x - 2y + 2z$ pour $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Exercice 1.16
Il faut fabriquer une boîte rectangulaire sans couvercle avec $12m^2$ de carton. Quel est le volume maximum de cette boîte ?

Chapitre 2

Intégrales multiples

Sommaire

2.1 Rappels sur les intégrales simples

Le problème du calcul intégral a été vu dans les promotions précédentes et on rappelle qu'il dépend de l'opération réciproque de celui du calcul différentiel. Le problème s'écrit comme suit :

– Étant donné la différentielle d'une fonction, trouvez cette fonction. La fonction ainsi trouvée est appelée intégrale de l'expression différentielle donnée et l'opération pour la trouver porte le nom de l'intégration.
  Cette opération est indiquée par le signe $\int$ devant l'expression différentielle donnée. Ainsi, $\int f'(x)dx = f(x)$, $f(x)$ porte le nom de l'intégrale de cette expression différentielle ou primitive de $f'(x)$.
– La différentielle dx indique que x est la variable d'intégration.

La différentiation et l'intégration sont des opérations réciproques.

$$d\int f(x)dx = f(x), \qquad \int df(x) = f(x).$$

Ceci étant déjà vu antérieurement, nous supposons que les techniques élémentaires d'intégration sont déjà connues. Toutefois, la table ci-après essaie de rappeler les intégrales immédiates qui nous seront indispensables d'une manière ou d'une autre.

2.1.1 Intégrales immédiates

1	$\int dx = x + c$	$1'$	$\int adx = ax + c \quad (a \in \mathbb{R})$
2	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \ (n \neq -1)$	$2'$ $2''$	$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + c \ (n \neq -1)$ $\int \dfrac{1}{(ax+b)^n}dx = \frac{1}{a(-n+1)(ax+b)^{n-1}} + c \ (n \neq 1)$
3	$\int \frac{1}{x} = \ln\|x\| + c$	$3'$	$\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln\|ax+b\| + c$
4	$\int e^x dx = e^x + c$	$4'$	$\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + c$
5	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \ (a > 0, a \neq 1)$	$5'$	$\int a^{rx+b} = \frac{1}{r}\frac{a^{rx+b}}{r\ln a} + c$
6	$\int \sin x dx = -\cos x + c$	$6'$	$\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + c$
7	$\int \cos x dx = \sin x + c$	$7'$	$\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + c$
8	$\int \tan x dx = -ln\|\cos x\| + c$	$8'$	$\int \tan(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\ln\|\cos(ax+b)\| + c$
9	$\int \cot x dx = \ln\|\sin x\| + c$	$9'$	$\int \cot(ax+b)dx = \frac{1}{a}\ln\|\sin(ax+b)\| + c$
10	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int(1+\tan^2 x)dx$ $= \tan x + c$	$10'$	$\int \frac{dx}{\cos^2(ax+b)} = \frac{1}{a}\tan(ax+b) + c$
11	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int(1+\cot^2 x)dx$ $= -\cot x + c$	$11'$	$\int \frac{dx}{\sin^2(ax+b)} = -\frac{1}{a}\cot(ax+b) + c$
12	$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\|\tan\frac{x}{2}\| + c$ $=\ln\|co\sec x - \cot x\| + c$	$12'$	$\int \frac{dx}{\sin(ax+b)} = \frac{1}{a}\ln\|\tan\frac{(ax+b)}{2}\| + c$ $=\frac{1}{a}\ln\|co\sec(ax+b) - \cot(ax+b)\| + c$
13	$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\|\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\| + c$ $=\ln\|\sec x + \tan x\| + c$	$13'$	$\int \frac{dx}{\cos(ax+b)} = \frac{1}{a}\ln\|\tan\left(\frac{(ax+b)}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\| + c$ $=\frac{1}{a}\ln\|\sec(ax+b) + \tan(ax+b)\| + c$
14	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c$	$14'$	$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + c$
15	$\int \frac{-dx}{1+x^2} = arc\cot x + c$	$15'$	$\int \frac{-dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}arc\cot\frac{x}{a} + c$
16	$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left\|\frac{1+x}{1-x}\right\| + c$	$16'$	$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{a+x}{a-x}\right\| + c$
17	$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left\|\frac{1-x}{1+x}\right\| + c$	$17'$	$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + c$
18	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$	$18'$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{\|a\|} + c$
19	$\int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos x + c$	$19'$	$\int \frac{-dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arccos\frac{x}{\|a\|} + c$
20	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm 1}} = \ln\|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\| + c$	$20'$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\| + c$
21	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\|f(x)\| + c$	$21'$	$\int \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}dx = \sqrt{f(x)} + c$
22	$\int \sqrt{x^2+a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\|x+\sqrt{x^2+a^2}\| + c$		
23	$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\| + c$		
24	$\int f'(x)[f(x)]^r dx = \frac{1}{r+1}[f(x)]^{r+1} + c \quad$ avec $(r \neq -1)$		
25	$\int [f(x)dx = F(x) + c] \Rightarrow [\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + c]$		

Table 2.1 – Tableau des intégrales immédiates

2.1.2 Visualisation graphique de l'intégrale

Lorsque f est une fonction continue et positive sur un intevalle $[a, b]$, le nombre $\int_a^b f(x)dx$ s'interprète comme l'**aire** du domaine délimité par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

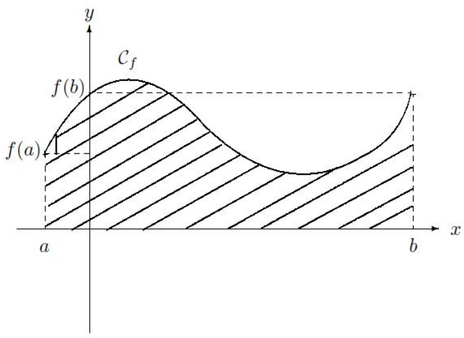


FIGURE 2.1 – Visualisation de l'intégrale

Idée pour la définition

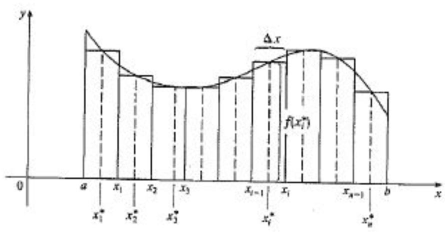


FIGURE 2.2

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, bornée. $\int_a^b f(x)dx$ est définie comme suit :
Étape 1 : on divise l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles de longueur $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$.

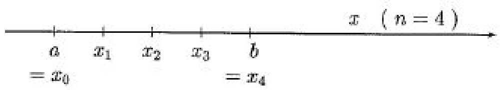


FIGURE 2.3

Étape 2 : dans chaque sous-intervalle, on choisit un point $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, et on calcule son image $f(x_i^*)$. L'aire du rectangle de base $[x_{i-1}, x_i]$ est donc $f(x_i^*)\Delta x_i$.
Étape 3 : pour prendre en compte la contribution de chaque rectangle, on calcule la somme de Riemann :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i. \tag{2.1}$$

(si f est positive, S_n est la somme des aires des rectangles).

Étape 4 : par définition,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} S_n, \tag{2.2}$$

limite lorsque n tend vers $+\infty$, c'est-à-dire la longueur des sous-intervalles tends vers 0.

2.2 Intégrales doubles

Nous avons été conduits à l'intégrale définie en essayant de résoudre un problème d'**aire**. De même, ici, la résolution d'un problème de **volume** nous conduira à la définition de l'intégrale double.

2.2.1 Définition de l'intégrale double

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée. Son intégrale double $\iint_D f(x,y)dxdy$ est définie de la façon suivante :

Étape 1 : on partage le domaine D en petits rectangles intérieurs R_{ij} de côtés :

$$\begin{aligned} \Delta x_i &= x_{i+1} - x_i \qquad (i = 0, 1, \ldots, m) \\ \Delta y_j &= j_{j+1} - y_j \qquad (j = 0, 1, \ldots, n) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Chaque petit rectangle a donc pour aire $\Delta A = \Delta x_i \Delta y_j$.

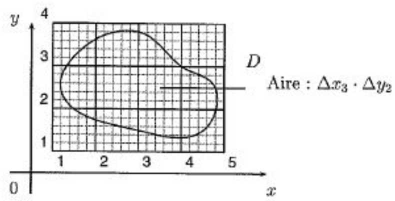


Figure 2.4

Étape 2 : dans chaque rectangle intérieur R_{ij}, on choisit un point (x^*_{ij}, y^*_{ij}). Le volume du parallélépipède de base R_{ij} est donc $f(x^*_{ij}, y^*_{ij})\Delta x_i \Delta y_j$.

Étape 3 : pour prendre en compte le volume de chaque parallélépipède, on calcule la **double somme de Riemann**

$$S_{m,n} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x^*_{ij}, y^*_{ij})\Delta x_i \Delta y_j. \tag{2.4}$$

(si f est positive, $S_{m,n}$ est la somme des volumes des parallélépipèdes de base R_{ij} et de hauteur $f(x^*_{ij}, y^*_{ij})$).

Étape 4 : par définition

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} S_{m,n}, \tag{2.5}$$

limite lorsque m et n tendent vers ∞, c'est-à-dire lorsque l'aire des petits rectangles $\Delta x_i \Delta y_j$ tend vers 0.

2.2.2 Représentation géométrique

Si f est continue et positive sur D, alors $\iint_D f(x,y)dxdy$ représente le **volume** du solide limité

- au-dessus par la surface $S \equiv z = f(x,y)$;
- en-dessous par le plan XOY ($z = 0$),
- et situé au-dessus du domaine D, la surface engendrée par des parallèles à l'axe OZ qui s'appuient sur la frontière de D ;

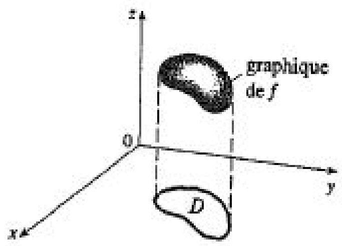


Figure 2.5

Si $f(x,y) = 1$, alors $\iint_D dxdy$ est l'aire de D.

2.2.3 Propriétés

P_1. $\displaystyle\iint_D (c_1 f(x,y) + c_2 f(x,y))dxdy = c_1 \iint_D f(x,y)dxdy + c_2 \iint_D f(x,y)dxdy.$

P_2. Si $D = D_1 \cup D_2$ où $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, alors,
$\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy.$

P_3. Si $f(x,y) \geq 0$, $\forall (x,y) \in D$, alors $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy \geq 0.$

2.2.4 Calcul d'une intégrale double

On se ramène au calcul de deux intégrales simples.
1^er cas : D est un rectangle $[a,b] \times [c,d]$. Alors,

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\underbrace{\int_c^d f(x,y)dy}_{\text{dépend de x}} \right] dx. \tag{2.6}$$

2^ème cas : $D = \{(x,y)/a \leq x \leq b,\ \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$. Alors,

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy \right] dx. \tag{2.7}$$

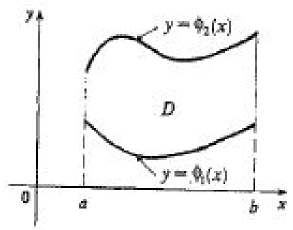


FIGURE 2.6

3^er cas : $D = \{(x, y)/c \leq y \leq d,\ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$. Alors,

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \right] dy. \tag{2.8}$$

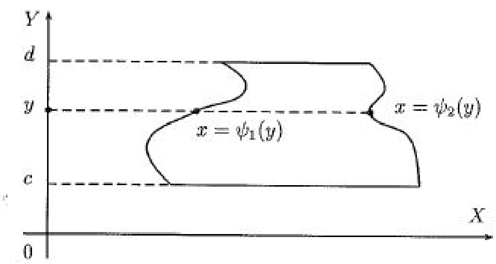


FIGURE 2.7

THÉORÈME 2.1 (THÉORÈME DE FUBINI)
Considérons une fonction continue de deux variables $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, et une région D du plan, contenue dans le domaine de définition de f, et bordée par une courbe fermée continue. Considérons un rectangle $[a, b] \times [c, d]$ contenant D. Pour chaque $x \in [a, b]$, notons $V_x = \{y \in \mathbb{R}$ tels que $(x, y) \in D\}$. Pour chaque $y \in [c, d]$, notons $H_y = \{x \in \mathbb{R}$ tels que $(x, y) \in D\}$. On a alors l'égalité

$$\int_{x=a}^{x=b} \left(\int_{y \in V_x} f(x,y)dy \right) dx = \int_{y=c}^{y=d} \left(\int_{x \in H_y} f(x,y)dx \right) dy. \tag{2.9}$$

REMARQUE 2.1
On peut intervertir les bornes d'intégration. Dans un ordre ou l'autre, le résultat est le même. Cependant, le niveau de difficulté peut être sensiblement différent.

2.2.5 Quelques exemples

EXEMPLE 2.1
Pour chacun des cas suivants, calculez l'intégrale double et vérifier le théorème de Fubini.

1. $\iint_R (x - 3y^2)dA$, *où* $R = \{(x, y)/0 \leq x \leq 2,\ 1 \leq y \leq 2\}$. ***R/*** $I = -12$
2. $f(x, y) = xy^2$ *sur le pavé* $P = [0, 1] \times [1, 2]$. ***R/*** $\frac{7}{6}$.

2.2.6 Changement de variables

Considérons un domaine D du plan OXY limité par une courbe L. Supposons que les coordonnées x et y sont des fonctions de nouvelles variables u et v :

$$x = \varphi(u, v) \text{ et } y = \psi(u, v). \tag{2.10}$$

où les fonctions φ et ψ sont univoques, continues et possèdent des dérivées continues dans un certain domaine. Il a été démontré que

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} F(u,v)|J|dudv; \text{ avec } J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix}. \tag{2.11}$$

Le déterminant J est appelé le déterminant fonctionnel ou Jacobien des fonctions φ et ψ. , $F(u,v) = z = f[\varphi(u,v), \psi(u,v)]$. Telle est la formule de **changement des coordonnées dans une intégrale double**. Elle permet de ramener le calcul d'une intégrale double dans le domaine D au calcul d'une intégrale double dans le domaine D' ; ce qui peut simplifier le problème. La 1ère démonstration rigoureuse de cette formule est due à OSTROGRADSKY.

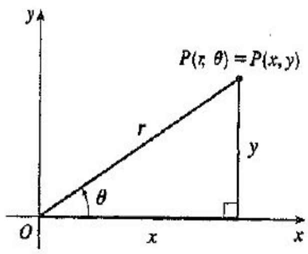


FIGURE 2.8

En particulier, le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires s'écrit

$$\begin{cases} x = rcos\theta, \\ y = r\sin\theta. \end{cases}$$

et la formule (2.11) s'écrit

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta. \tag{2.12}$$

REMARQUE 2.2
Le passage aux coordonnées polaires est particulièrement conseillé quand la fonction à intégrer contient l'expression $x^2 + y^2$ ou quand la région R implique des arcs de cercle centrés à l'origine (car $x^2 + y^2 = r^2$ et l'expression des cercles est de la forme $r = k$.)

EXEMPLE 2.2
*Calculez $\iint_R (3x + 4y^2)dxdy$ où R est la région du demi-plan supérieur compris entre les cercles $x^2 + y^2 = 1$ et $x^2 + y^2 = 4$. **R/** $R = \{(x,y)/y \geq 0,\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ et $I = \frac{15\pi}{2}$.*

EXEMPLE 2.3
*Calculez la surface d'un disque de rayon R en coordonnées cartésiennes. **R/** $S = \pi R^2$.*

2.2.7 Applications des intégrales doubles

2.2.7.1 Des densités et des masses

Les intégrales simples permettent de calculer des moments, des centres de masse d'une fine plaque de métal de densité constante. Armé des intégrales doubles, on peut aussi envisager une plaque de métal de densité variable. On suppose que la plaque de métal occupe une région D du plan OXY et que sa densité (en unités de masse par unité carrée) en un point (x,y) de D est donnée par $\rho(x, y)$ où ρ est une fonction continue de D. Cela signifie que

$$\rho(x, y) = \lim \frac{\Delta m}{\Delta A}$$

où Δm et ΔA sont la masse et l'aire d'un petit rectangle qui contient (x, y), la limite étant prise pour les dimensions du rectangle tendant vers 0 (voir FIGURE 2.9).

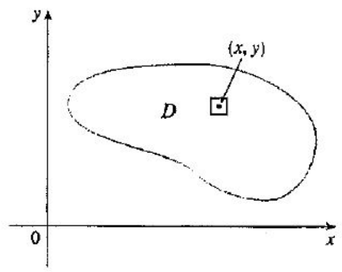


FIGURE 2.9

En vue de déterminer la masse totale de la plaque de métal, on divise le rectangle R contenant D en sous-rectangles R_{ij} de même taille (comme dans la FIGURE 2.10) et on considère $\rho(x, y)$ comme valant 0 en dehors de D. La masse de la partie de la plaque de métal qui occupe le sous-rectangle R_{ij} vaut approximativement $\rho(x^*_{ij}, y^*_{ij})$ où (x^*_{ij}, y^*_{ij}) est un point arbitrairement choisi dans R_{ij} et où ΔA est l'aire de R_{ij}. En additionnant toutes ces masses, on arrive à une approximation de la masse totale

$$m \approx \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \rho(x^*_{ij}, y^*_{ij}) \Delta A. \tag{2.13}$$

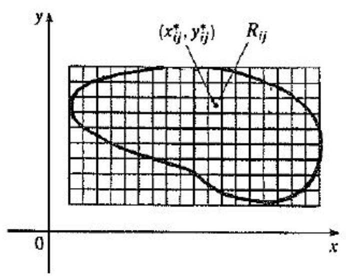


FIGURE 2.10

On obtient maintenant la masse **m totale de la plaque de métal**, comme la valeur limite de ces approximations, lorsque le nombre de sous-rectangles augmente sans borne

$$m = \lim_{k,l \to \infty} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \rho(x^*_{ij}, y^*_{ij}) \Delta A = \iint_D \rho(x, y) dA. \tag{2.14}$$

Les physiciens considèrent encore d'autres densités qui peuvent être traitées de la même manière. Par exemple, si une charge électrique est repartie sur une région D et que la densité de charge(en unités par unités carrées) est donnée par $\sigma(x, y)$ en un point (x, y) de D, alors la charge totale Q est calculée par

$$Q = \iint_D \sigma(x, y) dA. \tag{2.15}$$

Exemple 2.4
Une charge est distribuée sur le domaine triangulaire D de la de telle sorte que la densité de charge en (x, y) est $\sigma(x, y) = xy$, mesurée en coulombs mètre carré . Calculez la charge totale.

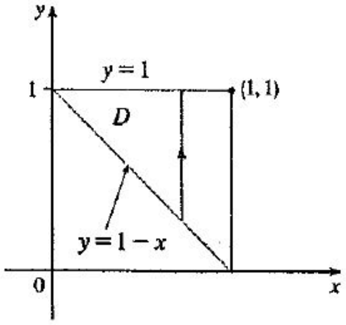


Figure 2.11

Solution *: La charge totale est de $\frac{5}{24}C$.*

2.2.7.2 Des moments et des centres de masse

On cherche maintenant le centre de masse d'une plaque de métal qui occupe une région D et dont la densité au point (x, y) est donnée par $\rho(x, y)$. Le moment d'une particule par rapport à un axe est défini comme le produit de sa masse par la distance à cet axe. On divise D en sous-rectangles R_{ij}. Comme la masse de R_{ij} est approchée par $\rho(x^*_{ij}, y^*_{ij})\Delta A$ (où (x^*_{ij}, y^*_{ij}) est un point quelconque de R_{ij}), le moment de R_{ij} par rapport à l'axe Ox vaut à peu près

$$[\rho(x^*_{ij}, y^*_{ij})\Delta A]y^*_{ij}.$$

Le **moment de la plaque de métal entière par rapport à l'axe Ox** s'obtient alors en additionnant ces quantités et en prenant la limite lorsque le nombre de sous-rectangles devient infiniment grand :

$$M_x = \lim_{k,l\to\infty} \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} y^*_{ij}\rho(x^*_{ij}, y^*_{ij})\Delta A = \iint_D y\rho(x, y)dA. \tag{2.16}$$

M_x mesure la tendance du système à tourner autour de l'axe OX. De même, le **moment par rapport à l'axe OY** est

$$M_y = \lim_{k,l\to\infty} \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} x^*_{ij}\rho(x^*_{ij}, y^*_{ij})\Delta A = \iint_D x\rho(x, y)dA. \tag{2.17}$$

M_y mesure la tendance du système à tourner autour de l'axe OY. On définit le centre de masse comme le point $(\overline{x}, \overline{y})$ dont les coordonnées satisfont à $m\overline{x} = M_y$ et $m\overline{y} = M_x$. Physiquement, cela signifie que la plaque de métal se comporte comme si toute sa masse était concentrée en son centre de masse. Par exemple, elle est en équilibre lorsqu'elle repose sur son centre de masse.

Définition 2.1
Les coordonnées $(\overline{x}, \overline{y})$ du centre de masse d'une plaque de métal qui occupe la région D et

dont la densité est donnée par la fonction $\rho(x, y)$ sont

$$\begin{cases} \overline{x} = \dfrac{M_y}{m} = \dfrac{1}{m} \iint_D x\rho(x, y)dA, \\ \\ \overline{y} = \dfrac{M_x}{m} = \dfrac{1}{m} \iint_D y\rho(x, y)dA, \end{cases} \tag{2.18}$$

où la masse m est donnée par

$$m = \iint_D \rho(x, y)dA.$$

EXEMPLE 2.5 *Déterminez la masse et le centre de masse d'une fine plaque de métal triangulaire dont les sommets sont $(0, 0)$, $(1, 0)$ et $(0, 2)$, sachant que la fonction de densité est $\rho(x, y) = 1 + 3x + y$* ***R****/ $m = \dfrac{8}{3}$ et les coordonnées du centre de masse sont $(\frac{3}{8}, \frac{11}{16})$.*

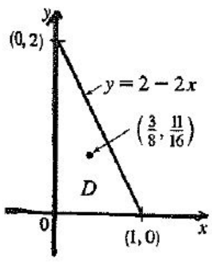


FIGURE 2.12

2.2.7.3 Le moment d'inertie

Le **moment d'inertie** d'une masse ponctuelle m par rapport à un axe est défini par mr^2 où r est la distance entre la masse ponctuelle et l'axe. On étend cette notion à une plaque de métal qui occupe une région D et dont la densité en (x, y) est donnée par $\rho(x, y)$ en procédant de la même façon que pour les moments ordinaires. On divise D en petits rectangles, on calcule une valeur approchée du moment d'inertie de chaque sous-rectangle par rapport à l'axe OX et on prend la limite de la somme lorsque le nombre de sous-rectangle devient infiniment grand. Le résultat est le **moment d'inertie de la plaque de métal par rapport à l'axe OX** :

$$I_x = \lim_{k,l \to \infty} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \left(y_{ij}^*\right)^2 \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A = \iint_D y^2 \rho(x, y)dA. \tag{2.19}$$

De même, le moment d'inertie par rapport à l'axe OY est

$$I_y = \lim_{k,l \to \infty} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \left(x_{ij}^*\right)^2 \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A = \iint_D x^2 \rho(x, y)dA. \tag{2.20}$$

Il est aussi intéressant de considérer le moment d'inertie par rapport à l'origine, encore appelé **moment polaire d'inertie**.

$$I_0 = \lim_{k,l \to \infty} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \left[\left(x_{ij}^*\right)^2 + \left(y_{ij}^*\right)^2\right] \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A = \iint_D (x^2 + y^2)\rho(x, y)dA. \tag{2.21}$$

Notez que

$$I_0 = I_x + I_y. \tag{2.22}$$

R/ $I_0 = \dfrac{\pi\rho a^4}{2} = \dfrac{1}{2}ma^2$ avec $m = \rho(\pi a^2)$.

Ainsi, si on augmente la masse ou le rayon du disque, on augmente du même coup le moment d'inertie. Le moment d'inertie est ce qui s'oppose à la mise en route ou à l'arrêt de la rotation d'une roue, exactement comme la masse d'une voiture rend difficile la mise en mouvement de la voiture ou son arrêt.

2.3 Intégrales triples

2.3.1 Définition

L'intégrale triple $\iiint_S f(x,y,z)dxdydz$ d'une fonction $f(x,y,z)$ de trois variables sur un "solide" S est définie et évaluée de façon similaire à l'intégrale double. Explicitement :

Étape 1 : Le solide S est partagé au moyen de parallélépipèdes intérieurs P_{ijk} de côtés $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_j = x_{j+1} - y_j$ et $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k$.

Étape 2 : Dans chaque parallélépipède P_{ijk}, on choisit un point $\left(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk}\right)$ où on évalue la fonction $f\left(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk}\right)$.

Étape 3 : Et on calcule la somme de Riemann :

$$S_{m,n,l} = \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{l-1} f\left(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk}\right)\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k. \tag{2.23}$$

Étape 4 : Par définition :

$$\iiint_S f(x,y,z)dxdydz = \lim_{m,n,l\to\infty} S_{m,n,l} \tag{2.24}$$

lorsque m, n et l tendent vers l'infini et que $\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$ de chaque parallélépipède tend vers 0.

2.3.2 Représentation géométrique

On se souvient que si $f(x) \geq 0$, l'intégrale simple $\int_a^b f(x)dx$ représente l'aire sous la courbe $y = f(x)$ depuis a jusqu'à b, et que si $f(,y) \geq 0$, l'intégrale double $\iint_D f(x,y)dA$ représente le volume sous la surface $z = f(x,y)$ au-dessus de D. L'interprétation analogue de l'intégrale triple $\iiint_S f(x,y,z)dV$ quand $f(x,y,z) \geq 0$, n'est pas très utile parce qu'il s'agirait d'un "**hypervolume**" d'un objet de dimension 4, impossible à visualiser. (Il faut être bien conscient que S n'est que le domaine d'intégration de la fonction f ; le graphique de f appartient à un espace de dimension quatre.) Néanmoins, l'intégrale triple $\iiint_S f(x,y,z)dV$ possède diverses interprétations dans différentes situations en physique, selon l'interprétation de $f(x,y,z)$ de x, y et z. En particulier, on voit que le volume de S tout entier est donné par :

$$\text{volume de S} = \iiint_S dxdydz. \tag{2.25}$$

2.3.3 Calcul d'une intégrale triple

L'évaluation d'une intégrale triple se **ramène à l'évaluation successive de trois intégrales simples**[il y a maintenant six ordres d'intégration possibles : ils conduisent tous à la même valeur !].

Supposons, par exemple, que le solide S puisse être décrit en disant que S est l'ensemble des points (x, y, z) tels que

$$\begin{cases} & a \leq x \leq b, \\ \text{puis, x étant fixé, que} & \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x), \\ \text{et enfin y étant aussi fixé, que} & \psi_1(x,y) \leq z \leq \psi_2(x,y). \end{cases}$$

Remarquez que les bornes d'intégration pour z peuvent dépendre de x et de y ; celles pour y ne peuvent dépendre que de x, et celles pour x doivent être des constantes. Alors, on aura :

$$\iiint_S f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \left(\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right) dy\right] dx; \tag{2.26}$$

ici, on intègre par rapport à z d'abord, puis par rapport à y, et enfin par rapport à x.

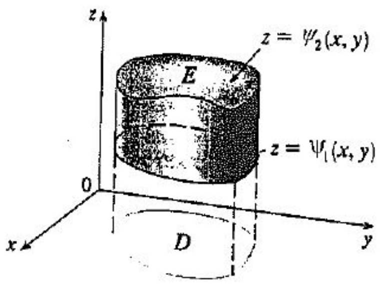


FIGURE 2.13

2.3.4 Quelques exemples

EXEMPLE 2.6
Calculez l'intégrale triple $\iiint_B xyz^2 dV$*, où* B *est le parallélépipède rectangle décrit par*

$$B = \{(x,y,z)/0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}.$$

R/ $V = \dfrac{27}{4}$.

EXEMPLE 2.7
Calculez $\iiint_E zdV$ *où* E *est le tétraèdre que forment les quatre plans* $x = 0$*,* $y = 0$*,* $z = 0$ *et* $x + y + z = 1$. ***R/*** $V = \dfrac{1}{24}$.

Les deux théorèmes ci-après présentent respectivement l'intégrale triple en coordonnées cylindres et sphériques.

THÉORÈME 2.2 (INTÉGRALE EN COORDONNÉES CYLINDRIQUES)
Soit f une fonction continue de deux variables x, y, z, et D une région bornée de l'espace $\mathbb{R}^3$,

délimitée par une surface fermée continue, et contenue dans le domaine de définition de f. On note

$$D' = \{(r, \theta, z) \in [0, +\infty[\times[0, 2\pi[\times\mathbb{R} / (r\cos(\theta), r\sin\theta, z) \in D\}.$$

On a alors

$$\iint_D f(x, y, z)dxdydz = \iiint_{D'} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)rdrd\theta dz. \tag{2.27}$$

Théorème 2.3 (Intégrale en coordonnées sphériques)
Soit f une fonction continue de deux variables x, y, z, et D une région bornée de l'espace $\mathbb{R}^3$, délimitée par une surface fermée continue, et contenue dans le domaine de définition de f. On note

$$D' = \{(r, \phi, \theta) \in [0, +\infty[\times[0, 2\pi] \times [0, \pi] / (r\cos\phi\sin\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\theta) \in D\}.$$

On a alors

$$\iiint_D f(x, y, z)dxdydz = \iiint_{D'} f(r\cos\phi\sin\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\theta)r^2\sin\theta drd\phi d\theta. \tag{2.28}$$

2.3.5 Applications des intégrales triples

Toutes les applications des intégrales doubles s'étendent aux intégrales triples. Par exemple, si la densité d'un solide qui coupe la région E est en tout point (x, y, z) donnée par $\rho(x, y, z)$, en unités de masse par unité de volume, alors sa masse est

$$m = \iiint_E \rho(x, y, z)dV, \tag{2.29}$$

et ses **moments par rapport aux trois plans de coordonnées** sont

$$M_{yz} = \iiint_E x\rho(x, y, z)dV, \tag{2.30}$$

$$M_{xz} = \iiint_E y\rho(x, y, z)dV, \tag{2.31}$$

$$M_{xy} = \iiint_E z\rho(x, y, z)dV. \tag{2.32}$$

Le **centre de masse** occupe le point $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ où

$$\overline{x} = \frac{M_{yz}}{m},\ \overline{y} = \frac{M_{xz}}{m},\ \overline{z} = \frac{M_{xy}}{m}. \tag{2.33}$$

Lorsque la densité est constante, le centre de masse est aussi le centre géométrique de E. Les **moments d'inertie par rapport aux trois axes de coordonnées** sont

$$I_x = \iiint_E \left(y^2 + z^2\right)\rho(x, y, z)dV, \tag{2.34}$$

$$I_y = \iiint_E \left(x^2 + z^2\right)\rho(x, y, z)dV, \tag{2.35}$$

$$I_z = \iiint_E \left(x^2 + y^2\right)\rho(x, y, z)dV. \tag{2.36}$$

La **charge électrique totale** d'un solide qui occupe la région E et dont la densité de charge en un point est donnée par $\sigma(x, y, z)$ est calculée par

$$Q = \iiint_E \sigma(x, y, z)dV. \tag{2.37}$$

Exemple 2.8
Situez le centre de masse d'un solide de densité constante, borné par le cylindre parabolique $x = y^2$ et les plans $x = z$, $z = 0$ et $x = 1$.

R/ Le centre de masse est situé en en $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = \left(\frac{M_{yz}}{m}, \frac{M_{xz}}{m}, \frac{M_{xy}}{m}\right) = \left(\frac{5}{7}, 0, \frac{5}{14}\right)$.

2.4 Exercices

Exercice 2.1
Calculez $\iint_R ysin(xy)dA$, où $R = [1,2] \times [0,\pi]$. **R**/ $I = 0$.

Exercice 2.2
Calculer :

1. $A = \int_0^1 \left[\int_0^{x^2}(x^2+y^2)dy\right]dx$
2. $B = \int_0^1 \int_0^x (x-y)dxdy$.
3. $C = \int_0^1 \int_0^{1-x} x^2 ydxdy$.
4. $D = \int_0^1 \int_{x-1}^{1-x}(x+2y)dxdy$.

Exercice 2.3
Calculer $\iint_D f(x,y)dxdy$ dans les cas suivants

1. $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y}$ et $D = [-1,1] \times [1,2]$,
2. $f(x,y) = \sin(x+y)$ et $D = [0,\pi/2] \times [0,\pi/2]$,
3. $f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{1+xy+x^2}}$ et $D = [3,7] \times [-2,2]$.
4. $f(x,y) = x+y$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/1 \geq x \geq 0, x^2 \leq y \leq x\}$.

Exercice 2.4

1. Calculer $I_D = \iint_D (1+x+y)dxdy$ sachant que D est défini par les courbes $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ et $y = 3/2$.
2. Calculer $I_D = \iint_D (4-x^2-y^2)dxdy$ sachant que D est défini par les droites $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ et $y = 3/2$. **R**/ $I_D = 35/8$.

Exercice 2.5
Calculez la mesure du volume délimité par le paraboloïde elliptique $x^2 + 2y^2 + z = 16$, les plans $x = 2$ et $y = 2$ et les plans de coordonnées. **R**/ $V = 48$.

Exercice 2.6
Si D est le domaine délimité par les paraboles $y = 2x^2$ et $y = 1 + x^2$, calculez $\iint_D (x+2y)dA$. **R**/ $I = \frac{32}{15}$.

Exercice 2.7
Calculez le volume du solide qui s'élève sur le domaine D du plan OXY délimitée par la droite $y = 2x$ et la parabole $y = x^2$, et couverte par le paraboloïde $z = x^2 + y^2$. **R**/ $I = \frac{216}{35}$.

Exercice 2.8
Calculez l'intégrale itérée $\int_0^1 \int_x^1 \sin(y^2)dydx$. **R**/ $I = 0.23$

Exercice 2.9
Déterminez le volume du solide délimité par le plan $z = 0$ et le paraboloïde $z = 1 - x^2 - y^2$. **R**/ $V = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 2.10
Calculez le volume de la sphère centrée à l'origine et de rayon égal à R. **R**/ $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

Exercice 2.11
Calculer :

1. $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} xyzdzdydx$. **R**/ $V = \frac{1}{720}$.

Exercice 2.12
La densité en un point quelconque d'une plaque de métal semi-circulaire est proportionnelle à la distance de ce point par rapport au centre du cercle. Déterminez le centre de masse de la plaque de métal. **R**/ $m = \frac{K\pi a^3}{3}$ et le centre de masse se situe au point $(0, \frac{3a}{2\pi})$.

Exercice 2.13
Calculez le centre de gravité du tetraèdre S défini par les inégalités :

$$x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0 \text{ et } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \leq 1.$$

R/ Le centre de gravité est le point $\dfrac{1}{4}(a, b, c)$.

Chapitre 3

Équations différentielles ordinaires du premier et du second ordre

Sommaire

3.1 Introduction

Lorsqu'un corps tombe en chute libre sans frottement, il n'est soumis qu'à son poids $\vec{P}$. Par le principe fondamental de la mécanique $\vec{P} = m\vec{a}$. Tous les vecteurs sont verticaux donc $mg = ma$, où g est la constante de gravitation, a l'accélération verticale et m la masse. On obtient $a = g$. L'accélération étant la dérivée de la vitesse par rapport au temps, on obtient :

$$\frac{dv(t)}{dt} = g. \tag{3.1}$$

Il est facile d'en déduire la vitesse par intégration : $v(t) = gt$ (en supposant que la vitesse initiale est nulle), c'est-à-dire que la vitesse augmente de façon linéaire au cours du temps. Puisque la vitesse est la dérivée de la position, on a $v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$, donc par une nouvelle intégration on obtient $x(t) = \frac{1}{2}gt^2$ (en supposant que la position initiale est nulle).

Le cas d'un parachutiste est plus compliqué. Le modèle précédent n'est pas applicable car il ne tient pas compte des frottements. Le parachute fait subir une force de frottement opposée à sa vitesse. On suppose que le frottement est proportionnel à la vitesse : $F = -fmv$

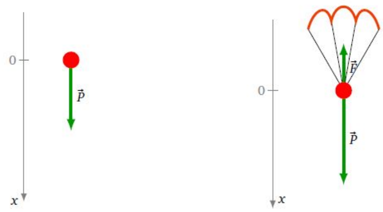


FIGURE 3.1 – Chute libre - Parachutiste

(f est le coefficient de frottement). Ainsi le principe fondamental de la mécanique devient $mg - fmv = ma$, ce qui conduit à la relation :

$$\frac{dv(t)}{dt} = g - fv(t) \tag{3.2}$$

C'est une relation entre la vitesse v et sa dérivée : il s'agit d'une **équation différentielle**. Il n'est pas évident de trouver quelle est la fonction v qui convient. Le but de ce chapitre est d'apprendre comment déterminer $v(t)$, ce qui peut nous permettre d'en déduire la position $x(t)$ à tout instant.

3.2 Généralités

DÉFINITION 3.1 (ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE)
On appelle équation différentielle, toute équation établissant une relation entre la variable indépendante x, la fonction inconnue $y = f(x)$ et ses dérivées partielles $y', y'', \ldots, y^{(n)}$. Symboliquement on peut écrire

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \text{ ou } F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0. \tag{3.3}$$

Si $y = f(x)$ est une fonction de la seule variable indépendante x, alors l'équation différentielle est dite **ordinaire**.

DÉFINITION 3.2 (ORDRE/DEGRÉ D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE)
*On appelle **ordre** d'une équation différentielle, l'ordre de la dérivée la plus élevée contenue dans cette équation et son degré est celui de la dérivée dont l'ordre est le plus élevé lorsqu'on tient compte du fait que cette équation peut s'écrire sous forme d'un polynôme dont les indéterminées sont les dérivées.*

EXEMPLE 3.1
$y' - 2xy^2 + 5 = 0$ *est une équation du 1er ordre,* $y'' + ay' - by - \sin x = 0$ *est une équation du second ordre. Alors que* $(y'')^3 - (y')^7 + 5y^2 + 2x^2 = 1$ *est de degré 3.*

Nous nous concentrerons principalement sur des EDO du premier et du second ordre (n = 1 et n = 2). Des EDO d'ordre plus élevé sont plus rares, mais peuvent néanmoins être rencontrées dans la modélisation de certains phénomènes réels.

DÉFINITION 3.3 (EDO LINÉAIRE/NON-LINÉAIRE)
Une EDO linéaire se présente sous la forme

$$a_0(x)y(x) + a_1(x)\frac{dy}{dx}(x) + \cdots + a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}(x) = b(x) \tag{3.4}$$

où les $a_i(x)$ et $b(x)$ sont des fonctions réelles continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Le terme linéaire signifie grosso modo qu'il n'y a pas d'exposant pour les termes y, y', y'',...

Dans ce cours, nous considérons principalement des EDO linéaires. Si une EDO n'est pas linéaire, on dit qu'elle est **non-linéaire**. Sauf dans certains cas particuliers(par exemple quand l'ordre est égal à 1), les EDO non-linéaires ne sont pas résolubles analytiquement et il est alors nécessaire de recourir au calcul numérique (par ordinateur).

Définition 3.4 (EDO homogène/inhomogène)

* *Une équation différentielle linéaire est homogène, ou sans second membre, si la fonction b ci-dessus est la fonction nulle :*

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_n(x)y^{(n)} = 0. \tag{3.5}$$

Si l'EDO n'est pas homogène, on dit qu'elle est ***inhomogène****.*

* *Une équation différentielle linéaire est* ***à coefficients constants*** *si les fonctions a_i ci-dessus sont constantes :*

$$a_0y + a_1y' + \cdots + a_ny^{(n)} = b(x). \tag{3.6}$$

où les a_i sont des constantes réelles et b une fonction continue.

Exemple 3.2

1. $y' + 5xy = e^x$ *est une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre.*
2. $y' + 5xy = 0$ *est l'équation différentielle homogène associée à la précédente.*
3. $2y'' - 3y' + 5y = 0$ *est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, sans second membre.*
4. $(y')^2 - y = x$ *ou* $y'' \cdot y' - y = 0$ *ne sont pas des équations différentielles linéaires.*

Exemple 3.3
Voici quelques exemples d'EDO rencontrées en physique, chimie ou biologie :

1. $\dfrac{dy}{dx} = ky$ ou $\dfrac{dx}{dt} = ky$: EDO linéaire homogène du premier ordre décrivant la cinétique d'une transformation chimique avec un seul réactif, une décroissance radioactive, la disparition d'une espèce d'animaux, etc.
2. $\dfrac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x)$: EDO non-linéaire inhomogène du premier ordre décrivant la cinétique d'une transformation chimique avec un, deux réactifs.
3. $\dfrac{d^2h}{dt^2} = -g$: EDO linéaire inhomogène du second ordre décrivant la chute libre d'un corps.
4. $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$: EDO linéaire homogène du second ordre décrivant l'oscillateur harmonique (vibration d'une molécule, mouvement d'un ressort ou d'un pendule simple près de la verticale).
5. $\dfrac{-\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2\psi}{dx^2} + \dfrac{k}{2}x^2\psi = E\psi$: EDO linéaire homogène du second ordre correspondant à l'équation de Schrödinger indépendante du temps pour l'oscillateur harmonique (molécule diatomique quantique).

Définition 3.5 (Solution ou intégrale d'une équation différentielle)
On appelle solution ou intégrale d'une équation différentielle, toute fonction $y = f(x)$ vérifiant identiquement cette équation.

Exemple 3.4
Soit l'équation différentielle $y'' + y = 0$. Les fonctions $y = \sin x$, $y = 2\cos x$, $y = 3\sin x - \cos x$ et, plus généralement, toute fonction de la forme $y = c_1 \sin x$ ou $y = c_2 \cos x$ ou $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$ sont des solutions de l'équation donnée, quelles que soient les constantes c_1 et c_2.

Les trois premières fonctions, ainsi que les deux suivantes, sont des **solutions particulières**. La dernière est une **solution générale**.

3.3 Intégration

3.3.1 Équation du premier ordre

3.3.1.1 Définitions

Définition 3.6
Une équation différentielle ordinaire du 1er ordre est de la forme

$$F(x, y, y') = 0. \tag{3.7}$$

Lorsque cette équation est résoluble en y', on peut la mettre sous la forme

$$y' = f(x, y).$$

Dans ce cas, on a le théorème suivant sur l'existence et l'unicité de la solution.

Théorème 3.1 (Existence de solution)
Si dans l'équation $y' = f(x, y)$ la fonction $f(x, y)$ et sa dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues dans un certain domaine D du plan Oxy et si (x_0, y_0) est un point de D, alors il existe une solution unique $y = \psi(x)$ satisfaisant à la condition $y = y_0$ lorsque $x = x_0$.

La condition, que la fonction y doit prendre la valeur donnée y_0 lorsque $x = x_0$, s'appelle la **condition initiale**. On l'écrit souvent sous la forme

$$y|_{x=x_0} = y_0. \tag{3.8}$$

Le couple EDO-CI porte le nom de **problème de Cauchy** ou de **problème aux valeurs initiales** :

Définition 3.7 (Problème de Cauchy)
*Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, t_0 un point de I, $\psi : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction donnée continue par rapport aux deux variables et y_0 la dérivée de y par rapport à t. On appelle **problème de Cauchy** le problème trouver une fonction réelle $y \in \mathcal{C}^1(I)$ telle que*

$$\begin{cases} y'(t) = \psi(t, y(t)), \ \forall t \in I, \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{3.9}$$

*avec y_0 une valeur donnée appelée **donnée initiale**.*

*Si ψ ne dépend pas explicitement de t (i.e. si $\psi(t, y(t)) = \psi(y(t))$), l'EDO est dite **autonome**.*

Remarque 3.1

1. *On appelle* ***solution générale*** *d'une équation du 1er ordre, une fonction $y = \psi(x, c)$ dépendant d'une constante arbitraire c et satisfaisant aux conditions suivantes :*
   - *Quelle que soit la constante c, elle vérifie l'équation ;*
   - *Quelle que soit la condition initiale $y = y_0$ pour $x = x_0$, il existe $c = c_0$ tel que $y = \psi(x, c_0)$ vérifie la condition initiale donnée.*

   Lorsqu'on cherche la solution générale d'une équation différentielle, on est souvent conduit à une relation implicite $\phi(x, y, c) = 0$ que l'on appelle ***intégrale générale*** *de l'équation différentielle.*

2. *On appelle* ***solution particulière****, toute fonction $y = \psi(x, c_0)$ déduite de la solution générale en posant $c = c_0$. La relation $\phi(x, y, c_0) = 0$ est dite alors* ***intégrale particulière*** *de l'équation.*

3. ***Résoudre*** *ou* ***intégrer*** *une équation différentielle consiste à chercher sa solution générale ou son intégrale générale (si les conditions initiales ne sont pas données) ou chercher la solution particulière satisfaisant aux conditions initiales (s'il y en a).*

4. *Résoudre un problème de Cauchy, c'est chercher toutes les fonctions, définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, qui satisfont l'équation et qui vérifient la condition initiale.*
5. *Géométriquement, l'intégrale générale représente une famille de courbes planes dépendant d'un paramètre c. Ces courbes sont appelées* ***courbes intégrales*** *de l'équation différentielle donnée. Une intégrale particulière est représentée par une courbe de cette famille passant par un point du plan.*

3.3.1.2 Équation à variables séparées ou séparables

1. L'équation différentielle de la forme

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0 \tag{3.10}$$

   est appelée **équation à variables séparées**. Son intégrale générale est :

$$\int P(x)dx + \int Q(y)dy = c. \tag{3.11}$$

   Exemple 3.5
   Résoudre les équations différentielles suivantes :
   (a) *$xdx + ydy = 0$.* ***R/*** *$x^2 + y^2 = c^2 (, 2c_1 = c^2,\ c \geq 0)$: c'est l'équation d'une famille de cercles concentriques en $(0, 0)$ et de rayon c.*
   (b) *$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y}{x}$.* ***R/*** *$y = kx^2, k = e^c$: équation d'une famille de paraboles.*

2. Une équation de la forme

$$P_1(x)Q_1(y)dx + P_2(x)Q_2(y)dy = 0 \tag{3.12}$$

est appelée **équation à variables séparables**. Elle peut être ramenée à une équation à variables séparées en divisant les deux membres par $Q_1(y)P_2(x)$:

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = 0. \tag{3.13}$$

Exemple 3.6
Résoudre les équations suivantes :

(a) $(1 + x)ydx + (1 - y)xdy = 0$

(b) $(x^2 - 1)y' - 2x(y - 1) = 0$ *et déterminer la solution particulière pour laquelle* $x = 2, y = 4$.

(c) *Résoudre le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y'(x) - 4xy^2(x) = 0, \\ y(0) = 2. \end{cases} \qquad \boldsymbol{R}/y(x) = \frac{2}{1 - 4x^2}.$$

3.3.1.3 Équation différentielle homogène du premier ordre

Définition 3.8
Soient f une fonction réelle de deux variables réelles et D son domaine de définition. La fonction f est dite homogène de degré n par rapport aux variables x et y si

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ (\lambda x, \lambda y) \in D \ \ et \ f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y);\ n \in \mathbb{N}. \tag{3.14}$$

Exemple 3.7
$f(x, y) = xy - y^2$ *est homogène de degré* 2 *et* $p(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{xy}$ *est homogène de degré* 0.

Définition 3.9
L'équation différentielle ordinaire du 1er ordre $y' = f(x, y)$ est dite homogène par rapport à x et y si la fonction f est homogène de degré 0 par rapport à x et y.

Résolution : Par hypothèse, $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$. Posant dans cette identité $\lambda = \dfrac{1}{x}$, on a $f(1, \dfrac{y}{x})$; i.e. une fonction homogène de degré 0 dépend seulement du rapport $\dfrac{y}{x}$. Ainsi, $y' = f(1, \dfrac{y}{x})$ et, en posant $u = \dfrac{y}{x}$; i.e. $y = ux$, on a $y' = u + u'x$. Par suite $u + u'x = f(1, u)$; qui est une équation à variables séparables ; i.e.

$$x\frac{du}{dx} = f(1, u) - u \Leftrightarrow \frac{du}{f(1, u) - u} = \frac{dx}{x}. \tag{3.15}$$

Substituant, après intégration, $u = \dfrac{y}{x}$, on obtient l'intégrale de l'équation.

Exemple 3.8

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 - y^2}. \qquad \boldsymbol{R}/\ x = y\sqrt{-2ln|ky|}.$$

3.3.1.4 Équation linéaire

Définition 3.10 *Une équation linéaire s'écrit sous la forme*

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x), \tag{3.16}$$

avec $P(x)$ et $Q(x)$ des fonctions continues en x (ou des constantes).

La solution d'une telle équation se met sous la forme

$$y = U(x)V(x), \tag{3.17}$$

avec

$$V(x) = e^{-\int P(x)dx} \text{ et } U(x) = \int \frac{Q(x)}{V(x)}dx + c. \tag{3.18}$$

Exemple 3.9
Intégrer

1. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{2}{x+1}y = (x+1)^3$
2. $y' + 2xy = 4x.$

3.3.2 Équations différentielles linéaires du second ordre

3.3.2.1 Forme générale

Définition 3.11
Considérons des scalaires $a, b \in \mathbb{K}$ tel que $a \neq 0$ et une fonction $f : I \to \mathbb{K}$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. On appelle équation différentielle du second ordre, toute équation différentielle de la forme

$$\forall x \in I,\ y'' + ay' + by = f(x) \tag{3.19}$$

3.3.2.2 Intégration

Elle se fait en deux étapes :

1. Trouver la solution $\overline{y}$ de l'équation homogène

$$y'' + ay' + by = 0. \tag{3.20}$$

2. Trouver une solution particulière quelconque y^* de l'équation (3.19).

Ainsi, la solution générale de l'équation (3.19) est donnée par

$$y = y^* + \overline{y}. \tag{3.21}$$

(a) Recherche de $\overline{y}$

Il n'existe pas de méthode générale de calcul de $\overline{y}$ lorsque a ou b est variable. Il en existe seulement lorsque a et b sont constants. Néanmoins, dans l'un ou l'autre cas, la recherche de $\overline{y}$ repose sur les propriétés et définitions ci-dessous.

Propriété 3.1
Si y_1 et y_2 sont deux solutions particulières de l'équation linéaire homogène du 2nd ordre (3.20), alors $y_1 + y_2$ est aussi une solution de cette équation.

Propriété 3.2
Si y_1 est une solution de l'équation (3.20), et si c est une constante, alors cy_1 est aussi une solution de cette équation.

Définition 3.12 (Wronskien)
y_1 et y_2 étant des fonctions de x, le déterminant

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_1'y_2 \tag{3.22}$$

*est appelé **déterminant de WRONSKI** ou **WRONSKIEN** des fonctions données.*

Propriété 3.3
Si les fonctions y_1 et y_2 sont linéairement dépendantes sur le segment $[a, b]$, alors leur Wronskien est identiquement nul sur ce segment.

Propriété 3.4
Si les solutions y_1 et y_2 de l'équation (3.20) sont linéairement indépendantes sur le segment $[a, b]$, alors le Wronskien formé de ces solutions ne s'annule en aucun point de ce segment.

Propriété 3.5
Si y_1 et y_2 sont deux solutions, de l'équation (3.20), linéairement indépendantes, alors

$$y = c_1y_1 + c_2y_2$$

, où c_1 et c_2 sont des constantes arbitraires, est la solution générale de cette équation.

(b) Recherche de y^*

On se sert de la méthode générale dite **méthode de la variation des constantes arbitraires**.
Écrivons la solution générale de l'équation homogène. On a

$$y = c_1y_1 + c_2y_2. \tag{3.23}$$

On cherche une solution particulière de l'équation non homogène (3.19) sous la forme (3.23) en considérant c_1 et c_2 comme des fonctions de x qu'il faut déterminer.

Dérivons (3.23) pour avoir :

$$y' = c_1y_1' + c_1'y_1 + c_2y_2' + c_2'y_2 \tag{3.24}$$

Choisissons les fonctions c_1 et c_1 de manière que

$$c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0 \tag{3.25}$$

Dans ce cas,

$$y' = c_1y_1' + c_2y_2' \text{ et } y'' = c_1y_1'' + c_2y_2'' + c_1'y_1' + c_2'y_2' \tag{3.26}$$

(3.23), (3.24) et (3.26) dans (3.19) donnent :

$$c_1(y_1'' + ay_1' + by_1) + c_2(y_2'' + ay_2' + by_2) + c_1'y_1' + c_2'y_2' = f(x) \tag{3.27}$$

or y_1 et y_2 sont des solutions de l'équation (3.20). Donc

$$c_1'y_1' + c_2'y_2' = f(x). \tag{3.28}$$

Ainsi, la fonction (3.23) est solution de l'équation avec second membre (3.19) pourvu que les fonctions c_1 et c_2 satisfassent aux équations (3.25) et (3.28) ; c'est-à-dire :

$$c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0 \text{ et } f(x) = c_1'y_1' + c_2'y_2'; \tag{3.29}$$

système dont le déterminant est le Wronskien des solutions linéairement indépendantes y_1 et y_2 de l'équation homogène. On trouve c_1' et c_2' comme des fonctions de x, $c_1' = \psi_1(x)$ et $c_2' = \psi_2(x) \Leftrightarrow c_1 = \int \psi_1(x)dx + \overline{c}_1$ et $c_2 = \int \psi_2(x)dx + \overline{c}_2$; avec $\overline{c}_1$ et $\overline{c}_2$ des constantes arbitraires d'intégration. c_1 et c_2 dans (3.23) donne la solution générale de l'équation (3.19).

3.3.2.3 Équations linéaires du 2nd ordre à coefficients constants

(a) Équations homogènes à coefficients constants

Soient a et b des constantes réelles et

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{3.30}$$

l'équation linéaire homogène du 2nd ordre.

Parce qu'elle est d'ordre deux, sa solution générale contient deux constantes et parce qu'elle est linéaire, toute combinaison linéaire $c_1y_1 + c_2y_2$ de solutions y_1 et y_2 est une solution. En cherchant une solution de la forme $y = e^{\lambda x}$, on voit que le paramètre λ doit satisfaire l'équation algébrique

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \tag{3.31}$$

L'équation (3.31) est appelée **équation caractéristique** de l'éq. (3.30). Elle est du second degré à une inconnue λ. C'est-à-dire

$$\lambda = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \tag{3.32}$$

Trois cas sont possibles.

1. $a^2 - 4b > 0$. Alors on a deux racines réelles distinctes

$$\lambda_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \text{ et } \lambda_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

et la solution générale de l'équation différentielle est

$$y = c_1e^{\lambda_1 x} + c_2e^{\lambda_2 x}. \tag{3.33}$$

Exemple 3.10
La solution générale de l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = 0$ est $y = c_1e^{2x} + c_2e^{x}$.

2. $a^2 - 4b = 0$. Alors on a une racine réelle double

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{a}{2}$$

et la solution générale de l'équation différentielle est

$$y = (c_1 + c_2)e^{\lambda_1 x}. \tag{3.34}$$

Exemple 3.11
La solution générale de l'équation différentielle $y'' - 4y' + 4y = 0$ *est* $y = (c_1 + c_2)e^{-2x}$.

3. $a^2 - 4b < 0$. Alors on a deux racines complexes conjuguées

$$\lambda = \frac{-a \pm i\sqrt{4b - a^2}}{2}.$$

Posons $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ et $\lambda_2 = \alpha - i\beta$; $\alpha = -\frac{b}{2}$ et $\beta = \frac{1}{2}\sqrt{4b - a^2}$. La solution générale s'écrit

$$y = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x = e^{\alpha x} \left(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x\right). \tag{3.35}$$

Exemple 3.12
Soit l'équation $y'' + 2y' + 5y = 0$. *Trouver son intégrale générale et la solution particulière satisfaisant aux conditions initiales* $y|_{x=0} = 0$ *et* $y_0' = 1$

(b) Équations non homogènes à coefficients constants

Soit l'équation

$$y'' + ay' + by = f(x) \tag{3.36}$$

avec a et b des constantes réelles. La méthode générale reste valable. Mais, a et b étant constants, il est parfois plus simple de trouver une solution particulière sans intégration.

Considérons les types d'équations (3.36) pour lesquels cette remarque est valable.

1. Supposons que

$$f(x) = P_n(x)e^{\alpha x} \tag{3.37}$$

avec $P_n(x)$ un polynôme de degré n.

(a) Si α n'est pas une racine de l'équation caractéristique, alors il faut chercher la solution particulière sous la forme

$$y^* = (A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \cdots + A_n)e^{\alpha x} = Q_n(x)e^{\alpha x}. \tag{3.38}$$

On détermine les coefficients indéterminés de $Q_n(x)$.

(b) Si α est une racine simple de l'équation caractéristique, alors

$$y^* = xQ_n(x)e^{\alpha x}. \tag{3.39}$$

(c) Si α est une racine réelle double de l'équation caractéristique, alors

$$y^* = x^2 Q_n(x)e^{\alpha x}. \tag{3.40}$$

2. Supposons que

$$f(x) = P(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + Q(x)e^{\alpha x} \sin \beta x \tag{3.41}$$

avec $P(x)$ et $Q(x)$ des polynômes.

(a) Si $\alpha + i\beta$ n'est pas une racine de l'équation caractéristique, alors il faut chercher une solution particulière de l'équation (3.36) sous la forme

$$y^* = U(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + V(x)e^{\alpha x} \sin \beta x \tag{3.42}$$

(b) Si $\alpha - i\beta$ est une racine de l'équation caractéristique, alors il faut chercher une solution particulière de l'équation (3.36) sous la forme

$$y^* = x[U(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + V(x)e^{\alpha x}\sin\beta x]. \tag{3.43}$$

Exemple 3.13 *Intégrer les équations différentielles suivantes :*

1. $y'' + 4y' + 3y = x$. $\boldsymbol{R}/y = \overline{y} + y^* = c_1e^{-x} + c_2e^{-3x} + \frac{1}{3}x - \frac{4}{9}$.
2. $y'' + 9y = (x^2+1)e^{3x}$. $\boldsymbol{R}/\ y = c_1\cos 3x + c_2\sin 3x + \left(\frac{1}{18}x^2 - \frac{1}{27}x + \frac{5}{81}\right)e^{3x}$.
3. $y'' - 7y + 6y = (x-2)e^x$. $\boldsymbol{R}/\ y = c_1e^{6x} + c_2e^x + x\left(-\frac{1}{10}x + \frac{9}{25}\right)e^x$.
4. $y'' + 2y' + 5y = 2\cos x$. $\boldsymbol{R}/\ y = e^{-x}(c_1\cos 2x + c_2\sin 2x +) + \frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x$.

3.4 Exercices

Exercice 3.1
Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

1. $\begin{cases} y'(x) + 2xy^2(x) = 0, \\ y(0) = 2. \end{cases}$
2. $\begin{cases} y'(x) - 4xy^2(x) = 0, \\ y(0) = 2. \end{cases}$

Exercice 3.2 (Loi de Newton K)
Considérons une tasse de café à la température de 75°C dans une salle à 25°C. Après 5 minutes le café est à 50°C. Si on suppose que la vitesse de refroidissement du café est proportionnelle à la différence des températures (i.e. que la température du café suit la loi de Newton), cela signifie qu'il existe une constante $K < 0$ telle que la température vérifie l'EDO du premier ordre

$$T'(t) = K(T(t) - 25)$$

avec la CI

$$T(5) = 50,$$

ayant convenu qu'une unité de temps correspond à une minute et la température est mesuré en degré Celsius. Trouver la solution générale du problème.

R/ On peut conclure que la température du café évolue selon la fonction

$$T(t) = 25 + 50e^{-\frac{\ln(2)}{5}t}.$$

Exercice 3.3 (Datation au carbone 14)
Le carbone 14 est un isotope présent dans tout organisme vivant. Le nombre d'atomes de carbone 14 est constant tant que l'organisme est en vie. À la mort de l'organisme, le nombre d'atomes décroît avec une vitesse proportionnelle au nombre d'atomes. On note $n(t) > 0$ le nombre d'atomes au temps t, exprimé en années, après la mort de l'organisme. Ce mécanisme se traduit par l'équation

$$n'(t) = -kn(t)$$

où k est une constante positive.

1. Trouver toutes les solutions de l'EDO.
2. Sachant qu'il faut 5700 ans pour que la quantité de carbone 14 diminue de moitié dans un organisme mort, calculer k.
3. Des ossements anciens récemment exhumés contiennent 9 fois moins de carbone 14 que des ossements similaires d'aujourd'hui. Déterminer l'âge des ossements exhumés.

Exercice 3.4 (« Les experts- Toulon »)
Le corps de la victime a été trouvé sur le lieu du crime à 2H20 de nuit. Après une demi-heure la température du corps est de 15°C. Quand a eu lieu l'homicide si à l'heure de la découverte la température du corps est de 20°C et si la température externe est de -5°C ?

Suggestion : se rappeler la loi de Newton qui dit que la vitesse de refroidissement est proportionnelle à la différence des températures.

Exercice 3.5 (« Un gâteau presque parfait »)
Un gâteau est sorti du four à 17H00 quand il est brûlant (100°C). Après 10 minutes sa température est de 80°Cet de 65°C à 17H20. Déterminer la température de la cuisine.

Suggestion : se rappeler la loi de Newton qui dit que la vitesse de refroidissement est proportionnelle à la différence des températures.

Exercice 3.6 (Urgence)
On étudie la progression d'une maladie contagieuse dans une population donnée. On note $x(t)$ la proportion des personnes malades à l'instant t et $y(t)$ celle des personnes non atteintes. On a donc $x(t) + y(t) = 1$ pour tout $t \geq 0$. On suppose que la vitesse de propagation de la maladie $x(t)$ est proportionnelle au produit $x(t)y(t)$ (ce qui signifie que la maladie se propage par contact). Si on note $I(t)$ le nombre d'individus infectés à l'instant t et I_T le nombre d'individus total, il existe une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que $I'(t) = kI(t)(I_T - I(t))$.

Si la ville est isolée et compte 5 000 individus dont 160 sont malades et 1 200 le sont 7 jours après, à partir de quel jour l'infection touchera 80% de la population ? Et 100% ?

Exercice 3.7
On note $y(t)$ le nombre de ménages vivant en France équipés d'un ordinateur (t est exprimé en années et $y(t)$ en millions de ménages). Le modèle de Varhulst estime que sur la période 1980-2020, $y(t)$ est solution de l'équation différentielle

$$y'(t) = 0.022y(t)(20 - y(t)).$$

1. Calculer toutes les solutions de l'équation différentielle.
2. On pose $t = 0$ en 1980 et on sait que $y(0) = 0.01$. Combien de ménages vivant en France seront équipés d'un ordinateur en 2020 ?

Exercice 3.8 (Modèle de Gompertz)
Lorsqu'une nouvelle espèce s'introduit dans un écosystème, elle évolue d'abord lentement, son rythme de croissance s'accélère ensuite à mesure qu'elle s'adapte, puis ralentit quand la population devient trop importante compte tenu des ressources disponibles. Pour ce type d'évolution, on utilise le modèle de Gompertz suivant :

$$y'(t) = -y(t)ln(y(t)).$$

Calculer toutes les solutions de cette équation différentielle pour $t > 0$ (ne pas oublier les solutions constantes). La population va-t-elle survivre ?

Exercice 3.9
Dans un circuit électrique de type résistance-inductance, le courant I évolue avec le temps selon

$$I'(t) + \frac{R}{L}I(t) = \frac{V}{L}$$

où R, L et V sont des constantes associées aux composantes électriques. Résolvez l'équation différentielle. La solution I tend-elle vers une limite finie ?

Exercice 3.10
On considère un réservoir de capacité 5000 l rempli d'une solution sel/eau parfaitement mélangée contenant 20 kg de sel. Un mélange qui contient 0.03 kg de sel par litre d'eau entre dans le réservoir à un débit de 25l/min. La solution est maintenue bien mélangés. Si $y(t)$ désigne la quantité (en kilos) de sel dissoute dans le réservoir à l'instant t, $y'(t)$ représente le taux de variation de la quantité de sel, i.e. la différence entre le taux auquel le sel entre et le taux auquel il en sort.

1. Après avoir calculé les taux auxquels le sel entre et sort du réservoir, montrer que cette situation est décrite par le problème de Cauchy
$$\begin{cases} y'(t) = 0.75 - \dfrac{y(t)}{200} \\ y(0) = 20 \end{cases}$$
2. Calculer l'unique solutions de ce problème.
3. Combien de sel reste dans le réservoir après une demi-heure ?

EXERCICE 3.11
Calculer les solutions des EDO linéaires du second ordre à coefficients constants suivantes :

1. $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 0$
2. $y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = 0$
3. $y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = 0$
4. $y''(x)6y(x) = e^{2x}$
5. $y''(x) - y'(x) = e^{x}$

EXERCICE 3.12
Trouver la solution des problèmes de Cauchy suivants :

1. $\begin{cases} y''(t) - 2y'(t) + 10y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2. \end{cases}$
2. $\begin{cases} y''(t) - 2\sqrt{2}y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$
3. $\begin{cases} y''(t) - 4y'(t) + 5y(t) = 0 \\ y(\frac{\pi}{2}) = 1 \\ y'(\frac{\pi}{2}) = 1 \end{cases}$
4. $\begin{cases} y''(t) + y'(t) - 12y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 4. \end{cases}$

EXERCICE 3.13
Calculer la solution générale des EDO d'ordre 2 linéaires à coefficients constants suivantes :

1. $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = (t^2 + 1)e^{-t}$.
2. $y''(t) - 2y'(t) - 3y(t) = 4e^{3t}$.
3. $y''(t) + y(t) = \sin(t)$
4. $y''(t) + y(t) = \sin(3t)$.
5. $2y''(t) - 5y'(t) + 3y(t) = e^{t}$.
6. $2y''(t) - 7y'(t) + 5y(t) = -3e^{t}$

EXERCICE 3.14
Trouver la solution des problèmes de Cauchy suivants :

1. $\begin{cases} y''(x) + 2y'(x) + y(x) = (1 - x)e^{-x} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2. \end{cases}$
2. $\begin{cases} y''(x) - 5y'(x) + 4y(x) = 2xe^{4x} \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 2. \end{cases}$
3. $\begin{cases} y''(x) + 9y(t) = 108x\cos(3x) \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$

Chapitre 4

Éléments de Calcul de probabilités

Sommaire

La théorie des probabilités est une branche bien établie des mathématiques qui trouve des applications dans tous les domaines de l'activité scientifique, de la musique à la physique, et dans l'expérience quotidienne, de la prévision météorologique à la prédiction des risques des nouveaux traitements médicaux.

4.1 Notion intuitive de probabilité

Historiquement, la notion de probabilité s'est dégagée à partir d'exemples simples empruntés généralement aux jeux de hasard.

1. Jetons en l'air une pièce de monnaie. Ce jet constitue une épreuve. c'est-à-dire une expérience dont le résultat est incertain. Il y a deux éventualités possibles : pile ou face.
   Si la pièce est symétrique et réellement lancée au hasard, on peut penser que ces

deux éventualités sont également probables.
Considérons l'éventualité : "obtenir face". Parmi les deux résultats également probables, il n'en y en a qu'un, l'obtention de face, qui est favorable. La probabilité d'avoir face est donc égale à $\frac{1}{2}$.

2. Tirons une carte dans un jeu de 52 Cartes. A priori nous ne pouvons prévoir quelle carte sera tirée. Si le jeu a été convenablement battu et si le tirage a réellement lieu au hasard, toutes les cartes ont la même chance d'être tirées : il ya 52 éventualités également probables. La probabilité d'obtenir une carte donnée, par exemple l'as de cœur est égale à $\frac{1}{52}$.

La notion d'**aléatoire** et le concept intuitif de **probabilité** remontent à l'antiquité mais c'est au XVI^e et au XVII^e siècle que des règles élémentaires de calcul sont développées. La fameuse correspondance entre les mathématiciens français Pascal et Fermat en 1654, concernant un problème du jeu au hasard proposé par un noble de l'époque, le Chevalier de Mérée, est considérée comme le point de départ du « calcul » des probabilités. Parmi les grands savants qui ont travaillé par la suite sur des problèmes de probabilités on peut mentionner Jacob Bernoulli avec son œuvre *Ars Conjectandi* (1713) ainsi que d'autres membres de cette famille unique de mathématiciens suisses, de Moivre avec son œuvre *Doctrine des chances* (1718) et ensuite Laplace, Euler, Gauss, Lagrange et Legendre. Jusqu'au début du XX^e siècle le domaine des probabilités resta un champ des mathématiques constitué d'un ensemble de résultats (intéressants et utiles) mais sans aucune base axiomatique. En 1900 Hilbert énonça son fameux programme qui contenait comme sixième problème le développement d'une structure axiomatique pour les probabilités. En 1933 le mathématicien russe A.N. Kolmogorov releva le défi en publiant un article qui présentait les fameux axiomes à la base du calcul des probabilités. Les probabilités devenaient alors un domaine des mathématiques à part entière comme la géométrie, l'algèbre ou encore l'analyse.

4.2 Techniques de dénombrement

4.2.1 Principe fondamental

Supposons qu'une expérience globale est la succession de m sous expériences. Si la i^ème expérience possède n_i résultats possibles pour $i = 1, 2, \cdots, n$, alors le nombre total des résultats possibles de l'expérience globale est $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_m$.

Exemple 4.1

(1) *Dans une ville donnée, les plaques d'immatriculation des véhicules comportent les lettres BK, suivies de 4 chiffres différents, suivis à leur tour des lettres BB. Combien peut-on ainsi immatriculer les véhicules différents ?*

Correction et discussion *: La formation d'une de ces plaques est une expérience composée consistant à choisir la lettre B (1 choix), la lettre K(1 choix), 10 choix possibles pour chacun des 4 chiffres qui suivent et finalement un choix pour chacune des deux dernières lettres. En appliquant le principe fondamental on obtient :*

$$1 \times 1 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 1 \times 1 = 10000 \textit{ plaques.}$$

– *Dans une ville donnée, les plaques d'immatriculation des véhicules comportent les lettres BK, suivies de 4 chiffres différents, suivis à leur tour des lettres BB. Combien* *peut-on ainsi immatriculer des véhicules différents ?*

Correction et discussion *: Pour ce cas, il y a* 1 *choix pour chacune des deux premières lettres,* 10 *choix pour le premier des* 4 *chiffres qui suivent,* 9 *choix pour le deuxième chiffre,* 8 *pour le troisième,* 7 *pour le quatrième et un choix pour chacune des deux dernières lettres. Le principe fondamental donne :*

$$1 \times 1 \times \times 1 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 1 \times 1 = 5040 \textit{ plaques.}$$

(2) *Répondre à la même question pour une ville où toute plaque d'immatriculation est composée de deux lettres quelconques de l'alphabet français suivies de* 4 *chiffres différents suivis à leur tour de deux lettres différentes de l'alphabet français.*

Correction et discussion *: Rappel : pour tout entier naturel non nul* n*, on appelle factorielle* n*, le nombre noté* $n!$ *et qui vaut le produit des* n *premiers nombres entiers non nuls. Exemples :* $5! =$ *;* $4! = 24$ *;* $6! = \ldots$

4.2.2 Arrangements

On appelle arrangement de n objets pris r à r une liste de r de ces n objets pris dans un ordre précis. Si ces r objets sont supposés distincts on parle d'arrangement sans répétition. Dans le cas contraire il y a répétition.

4.2.2.1 Arrangements avec répétition

Un arrangement avec répétition de r objets pris parmi n est une suite ordonnée de r éléments choisis parmi n, et pouvant se répéter.

Exemple 4.2
Un mot de six lettres est un arrangement avec répétition de six objets choisis parmi un ensemble, l'alphabet, de 26 éléments : habile, garage,...

Un tel arrangement peut être représenté par les r objets rangés dans des cases numérotées de 1 à r. Pour chacune de ces r cases, il y a n choix possibles de l'objet à ranger, donc le nombre total de ces arrangements est :

$$\mathcal{A}_n^r = n^r. \tag{4.1}$$

4.2.2.2 Arrangement sans répétition

- Un arrangement sans répétition de n objets pris k à k est une liste ordonnée de k objets différents pris parmi n.
  Pour former un arrangement sans répétition de n éléments pris k à k, il y a :
  – n choix possibles pour le premier élément,
  – $(n-1)$ choix possibles pour le deuxième,
  – $(n-2)$ choix possibles pour le troisième,
  – ainsi de suite...
  – $(n-k+1)$ choix possibles pour le k-ieme élément.
  Le nombre de tels arrangements se note A_n^k et on a :

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \tag{4.2}$$

Exemple 4.3

1. *Calculer* A_8^3, A_6^2, A_{10}^4
2. *Combien peut-on former des nombres à* 4 *chiffres à l'aide des chiffres* 1, 2, 4, 6, 8, 9 *?*
3. *Combien peut-on former des nombres à* 4 *chiffres dans le système de numération décimale ?*
4. *Combien peut-on former des nombres à* 4 *chiffres différents dans le système de numération décimale ?*

Exemple 4.4
12 *candidats se présentent aux élections à un conseil d'administration comportant* 8 *places. La liste des élus est publiée suivant le nombre de voix obtenu. Combien y a-t-il de listes possibles ?*

$$A_{12}^8 = \frac{12\,!}{4\,!} = 19\,958\,400.$$

- Si $n = k$ un arrangement sans répétition de n éléments pris k à k est tout simplement une liste des k de ces éléments pris dans un ordre précis. On parle alors de permutation de n éléments.

4.2.3 Permutations

Une permutation de n éléments est toute liste de ces n éléments dans un ordre donné. Il en résulte qu'une telle permutation est un arrangement de ces n éléments pris n à n. En notant P_n le nombre de telles permutations on a évidemment :

$$P_n = A_n^n = n!. \tag{4.3}$$

Ainsi, par exemple si Alice possède 4 visiteurs qu'elle doit asseoir à 4 places différentes, elle possède $4! = 24$ manières différentes de les asseoir.

Exemple 4.5
Un train comprend 10 *wagons différents. Combien y a-t-il de manières de constituer ce train (en supposant que la locomotive se trouve toujours en tête) ?*
$10! = 3628800.$

4.2.4 Combinaison sans répétition

Une combinaison sans répétition est un sous-ensemble non ordonné de k objets choisis dans un ensemble qui en contient n. Ces sous-ensembles sont au nombre de :

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\\ \complement_n^k &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \end{aligned}\tag{4.4}$$

Propriété 4.1

(1) $\mathtt{C}_n^k = \mathtt{C}_n^{n-k}$

(2) $\mathtt{C}_n^k + \mathtt{C}_n^{k+1} = \mathtt{C}_{n+1}^{k+1}$

*La formule ci-dessus fournit une méthode commode de calcul par récurrence des valeurs de $\mathtt{C}_n^p$. La matérialisation de cette méthode est appelée **triangle de Pascal** (Figure 4.1) :*

$$\mathtt{C}_{n-1}^{p-1} + \mathtt{C}_{n-1}^p = \mathtt{C}_n^p.$$

Chaque terme est la somme du terme immédiatement supérieur et de celui qui se trouve à la gauche de celui-ci.
Pour amorcer la relation de récurrence, on est conduit à poser, par convention :

$$\mathtt{C}_n^0 = 1, \text{ c'est à dire } 0\,! = 1.$$

En effet :

$$\begin{array}{rcl} \mathtt{C}_n^0 + \mathtt{C}_n^1 & = & \mathtt{C}_{n+1}^1, \\ \mathtt{C}_n^0 + n & = & n+1, \\ \textit{d'où :} \quad \mathtt{C}_n^0 & = & 1. \end{array}$$

n \ $p\rightarrow$	0	1	2	3	4	5	6	...
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

FIGURE 4.1 – Triangle de Pascal

(3) *Développement du binôme de Newton :*

$$(p+q)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathtt{C}_n^k p^k q^{n-k}. \tag{4.5}$$

$$\begin{array}{rcl} (p+q)^2 & = & p^2 + 2pq + q^2 \\ (p+q)^3 & = & p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3 \\ \dots\dots\dots & .. & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (p+q)^n & = & p^n + \mathtt{C}_n^1 p^{n-1} q + \cdots + \mathtt{C}_n^k p^k q^{n-k} + \cdots + q^n. \end{array}$$

REMARQUE 4.1

- *Dans un arrangement, l'ordre a de l'importance certainement aux combinaisons.*

- *Une combinaison avec répétition est un sous-ensemble non ordonné de k objets choisis dans un ensemble qui en contient n et qui peuvent se répéter.*

Exemple 4.6

1. *En utilisant la formule (4.4), calculer :* $\mathtt{C}_{10}^{3}$, $\mathtt{C}_{12}^{5}$, $\mathtt{C}_{6}^{3}$,...
2. *En appliquant la célèbre formule (4.5), développer* $(a+b)^3$, $(a-b)^3$, $(a+b)^4$, $(a-b)^4$, $(a+b)^6$ *et* $(2-z)^5$.

Exemple 4.7
12 *candidats se présentent aux élections à un conseil d'administration comportant* 8 *places. La liste des élus est publiée par ordre alphabétique. Combien y a-t-il de listes possibles ?*

$$\mathtt{C}_{12}^{8} = \frac{12\,!}{8\,!4\,!} = 495.$$

4.3 Vocabulaire

4.3.1 Expérience aléatoire

Définition 4.1
On appelle expérience aléatoire, une expérimentation ou un phénomène conduisant à plusieurs résultats et pour lequel on ne peut pas savoir à priori quel résultat se produira. Ces différents résultats sont appelés issues. L'ensemble de tous les issues possibles est appelé l'ensemble fondamental noté Ω.

Exemple 4.8

- *On lance une pièce de monnaie et on regarde la face supérieure, les issues possibles de cette expérience aléatoire sont : Pile, face*

$$\Omega = \{P, F\}$$

- *On jette un dé et on observe la face supérieure, les issues de cette expérience aléatoire sont les nombres :* $1; 2; 3; 4; 5; 6$.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

4.3.2 Événements

Définition 4.2
On appelle ***événement*** *une partie de l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire. L'événement est dit* ***élémentaire*** *s'il ne correspond qu'à une seule et unique issue. L'événement qui ne contient aucune éventualité est l'****événement impossible****, noté* $\emptyset$. *L'événement composé de toutes les éventualités est appelé* ***événement certain****.*

Exemple 4.9
Lancer d'un dé à six faces :

- *L'univers :* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

- $*$ *Obtenir* 2 *est une éventualité de cette expérience aléatoire.*
- $*$ *A :« obtenir un* 5 *» est un événement élémentaire que l'on peut noter* $A = \{5\}$.
- $*$ *B : « obtenir un numéro pair» est un événement que l'on peut noter* $B = \{2, 4, 6\}$.
- $*$ *Obtenir* 7 *est un événement impossible.*
- $*$ *Obtenir un nombre positif est un événement certain.*

Pour désigner un événement, on a l'habitude de procéder de deux manières :

- Soit par une phrase explicite qui définit clairement les issues que l'on souhaite garder. Dans l'expérience 2, on pourrait considérer l'événement : "le nombre désigné par la face supérieure du dé est pair", qui correspondrait à la partie $2, 4, 6$ de toutes les issues possibles de l'expérience.
- Soit par les issues elles-mêmes. Dans l'expérience 1, on pourrait considérer l'événement : "pile". C'est un événement élémentaire.
  Dans les deux cas, on peut nommer l'événement d'une lettre majuscule. ("Soit A l'événement...")

Définition 4.3
Deux événements sont dits incompatibles s'ils ne peuvent pas se produire en même temps.

Exemple 4.10

- *Dans l'expérience1 ; les événements "Pile" et "Face" sont incompatibles. En effet, si une face de la pièce est montrée, l'autre est cachée.*
- *Dans l'expérience 2 ; les événements "la face supérieure du dé est 1" et "la face supérieure du dé est 2" sont incompatibles. En effet, un dé immobilisé ne peut montrer les faces 1 et 2 en même temps.*

4.4 Notion de probabilité

Lorsqu'on fait une expérience aléatoire, on peut la renouveler un certain nombre de fois et calculer à chaque fois la fréquence (au sens statistique) d'un événement particulier. Celle-ci correspond au rapport du nombre de fois où l'événement se produit au nombre de fois où l'expérience est réalisée

Sur un petit nombre d'expérience, cette fréquence peut beaucoup varier. Par contre, si l'on renouvelle l'expérience un très grand nombre de fois (à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur par exemple), on voit cette fréquence qui variait beaucoup se stabiliser au tour d'une valeur.

Le calcul des probabilités se propose de déterminer cette fréquence théorique dans ce dernier cas, où l'expérience aléatoire est renouvelée un très grand nombre de fois... Ce qui nous amène à considérer la définition suivante :

4.4.1 Définition

Définition 4.4
La probabilité d'un événement A est notée $\mathbb{P}(A)$ et correspond au rapport

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\textit{Nombre d'issues favorables}}{\textit{Nombre d'issues possibles}} = \frac{\#A}{\#\Omega}. \tag{4.6}$$

De manière plus formelle, ε étant la classe des événements, une probabilité sur Ω est une application $\mathbb{P} : \varepsilon \longrightarrow [0, 1]$ vérifiant les propriétés suivantes :

Propriété 4.2

(1) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
(2) *Si* $A \cap B = \emptyset$ *alors* $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.
(3) *En général, si* $(A_i)_{i=1}^n$ *est une suite d'événements deux à deux disjoints, alors :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i). \tag{4.7}$$

Il résulte de cette définition que :

* $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
* Si $\overline{A}$ est l'événement contraire à A alors $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
* Si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.
* $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Exemple 4.11
On considère l'ensemble E des entiers de 1 *à* 20. *On choisit l'un de ces nombres au hasard.*
A est l'événement « le nombre est multiple de 3 » :

$$A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}.$$

B est l'événement « le nombre est multiple de 2 » :

$$B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}.$$

Calcul des probabilités :

- $\mathbb{P}(A) = \dfrac{6}{20} = \dfrac{3}{10} = 0,3.$
- $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A) = 1 - \dfrac{3}{10} = \dfrac{7}{10} = 0,7.$
- $\mathbb{P}(B) = \dfrac{10}{20} = \dfrac{1}{2} = 0,5.$
- $\mathbb{P}(A \cap B) = \dfrac{3}{20} = 0,15.$
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \dfrac{6}{20} + \dfrac{10}{20} - \dfrac{3}{20} = 0,65.$

4.4.2 Probabilité conditionnelle

Soient A et B deux événements, A étant supposé de probabilité non nulle. On appelle probabilité conditionnelle de B par rapport à A, la probabilité de la réalisation de l'événement B sachant que A est réalisé. On la note

$$\mathbb{P}(B/A) = \mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \tag{4.8}$$

Exemple 4.12
On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer un dé à 6 *faces, équilibré. On suppose que toutes les faces sont équiprobables, et on définit les événements :*

- *A : « la face obtenue porte un numéro multiple de 3 ».*

- *B : « la face obtenue porte un numéro pair». Déterminons la probabilité d'obtenir un numéro multiple de* 3*, sachant qu'on a un numéro pair de deux manières différentes.*

- *L'événement* (A/B) *correspond à l'événement « obtenir un numéro multiple de* 3 *parmi les éventualités de B », autrement dit parmi* $\{2, 4, 6\}$*. Il n'y a donc que l'issue « obtenir 6 » qui correspond. Ainsi, on obtient :*

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{1}{3}.$$

- *Par le calcul, on a :*

$$\mathbb{P}(B) = \frac{3}{6} \text{ et } \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{6}.$$

Donc, d'après la formule :

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1}{3}.$$

Proposition 4.1
Pour tous événements A et B de probabilité non nulle, on a :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B/A) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(A/B). \tag{4.9}$$

Proposition 4.2
Soit S un événement de probabilité non nulle, on a :

- $0 \leq \mathbb{P}_S(B) \leq 1.$
- $\mathbb{P}_S(\Omega) = 1.$
- $\mathbb{P}_S(\emptyset) = 0.$
- $\mathbb{P}_S(\overline{B}) = 1 - \mathbb{P}_S(B).$
- $\mathbb{P}_S(A \cup B) = \mathbb{P}_S(A) + \mathbb{P}_S(B) - \mathbb{P}_S(A \cap B).$
- Si A et B sont des événements incompatibles, alors $\mathbb{P}_S(A \cup B) = \mathbb{P}_S(A) + \mathbb{P}_S(B).$
- $\mathbb{P}_S(\overline{A} \cap \overline{B}) = \mathbb{P}_S(\overline{A \cup B}) = 1 - \mathbb{P}_S(A \cup B).$

4.4.3 Système complet d'événements

Une famille d'événements $A_1, A_2, \cdots, A_n$ est appelée système complet d'événements si :

1. $A_i \neq \emptyset, \forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}$
2. Pour $i \neq j$, on a : $A_i \cap A_j = \emptyset$
3. $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega.$

En langage ensembliste, un système complet d'événements est une partition de l'ensemble fondamental Ω.

4.4.3.1 Formule des probabilités totales (Formule a priori)

Si $A_1, A_2, \cdots, A_n$ est un système complet d'événements et si B est un événement quelconque alors :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) \cdot \mathbb{P}(B/A_i). \tag{4.10}$$

Exemple 4.13
Une usine possède trois machines qui produisent respectivement 60%, 30% et 10% du nombre total de pièces fabriquées. Le pourcentage de pièces défectueuses produites par chaque machine est respectivement de 1%, 2% et 3%. On choisit au hasard une pièce fabriquée par ces machines.

1. *Quelle est la probabilité qu'elle soit en bon état.* ***R****/* $\mathbb{P}(\overline{D}) = 0,985$. *Soit* $98,5\%$.
2. *Un client achète une pièce provenant de cette usine et constate qu'elle est défectueuse. Quelle est la probabilité qu'elle ait été fabriquée par la 2ème machine ?.*
   R*/* $\mathbb{P}(M_2/D) = 40\%$.

4.4.3.2 Formule de Bayes (Formule a posteriori)

Si $A_1, A_2, \cdots, A_n$ est un système complet d'événements et si B est un événement quelconque alors :

$$\mathbb{P}(A_i/B) = \frac{\mathbb{P}(A_i) \cdot \mathbb{P}(B/A_i)}{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A_j) \cdot \mathbb{P}(B/A_j)}. \tag{4.11}$$

En particulier, pour tous A et B deux événements de probabilité non nulle, on a respectivement :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}_A(B) \times \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}_{\overline{A}}(B) \cdot \mathbb{P}(\overline{A}). \tag{4.12}$$

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}_A(B) \cdot \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}. \tag{4.13}$$

En fait, la formule (4.13) permet de calculer directement $\mathbb{P}_B(A)$ sans passer par des étapes intermédiaires.

Exemple 4.14
Dans un atelier, deux machines M_1 et M_2 découpent des pièces métalliques identiques. M_1 fournit 60% de la production (parmi lesquelles 6,3% sont défectueuses), le reste étant fourni par M_2 (dont 4% de la production est défectueuse).
La production du jour est constituée des pièces produites par les deux machines, et on en tire en fin de soirée une pièce au hasard (tous les prélèvements sont supposés équiprobables).

- ⋆ *La probabilité de prélever une pièce défectueuse, sachant qu'elle est produite par M_1 est :*

$$\mathbb{P}_{M_1}(D) = 0,063.$$

- ⋆ *La probabilité de prélever une pièce défectueuse, sachant qu'elle est produite par M_2 est :*

$$\mathbb{P}_{M_2}(D) = 0,04.$$

⋆ *La probabilité de prélever une pièce défectueuse :*
En utilisant la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(D) &= \mathbb{P}(M_1 \cap D) + \mathbb{P}(M_2 \cap D)\\ &= \mathbb{P}(M_1) \times \mathbb{P}_{M_1}(D) + \mathbb{P}(M_2) \times \mathbb{P}_{M_2}(D)\\ &= 0,6 \times 0,063 + 0,4 \times 0,04\\ &= 0,0538.\end{aligned}$$

⋆ *Si on prélève une pièce défectueuse, calculons la probabilité qu'elle soit produite par la machine M_1 :*
En utilisant le théorème de Bayes, on a

$$P_D(M_1) = \frac{\mathbb{P}_{M_1}(D) \times \mathbb{P}(M_1)}{\mathbb{P}(D)} = \frac{0,063 \times 0,6}{0,0538} = 0,703.$$

EXEMPLE 4.15

(1) *La production d'une usine est assurée par trois machines M_1, M_2 et M_3 qui assurent respectivement 50%, 30% et 20% de la production totale. Il est connu que 2% des articles produits par M_1, 3% de ceux produits par M_2 et 5% de ceux produits par M_3 sont défectueux. Un client achète un article provenant de cette usine et constate qu'il est défectueux. Quelle est la probabilité qu'il ait été fabriqué par M_2 ?*

4.4.4 Événements indépendants

DÉFINITION 4.5
On dit que A et B sont des événements indépendants si et seulement si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B). \tag{4.14}$$

REMARQUE 4.2
Des événements peuvent être deux à deux indépendants sans être mutuellement indépendants.

EXEMPLE 4.16
On lance deux fois une pièce de monnaie équilibrée. Soient les événements :
A : « Obtenir pile au premier lancé ».
B : « Obtenir pile au deuxième lancé ».
C : « Obtenir pile-face ou face-pile ».
Nous allons montrer que les événements A, B et C sont indépendants deux-à-deux mais pas mutuellement. On a

$$\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}.$$
$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(PP, PF) = \frac{1}{2}.$$
$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(PP, FP) = \frac{1}{2}.$$
$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(PF, FP) = \frac{1}{2}.$$

$$\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(\{PP\})=\frac{1}{4}=\mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(B)\Rightarrow\ A\ \textit{et}\ B\ \textit{sont indépendants.}$$
$$\mathbb{P}(A\cap C)=\mathbb{P}(\{PF\})=\frac{1}{4}=\mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(C)\Rightarrow\ A\ \textit{et}\ C\ \textit{sont indépendants.}$$
$$\mathbb{P}(B\cap C)=\mathbb{P}(\{FP\})=\frac{1}{4}=\mathbb{P}(B)\times\mathbb{P}(C)\Rightarrow\ B\ \textit{et}\ C\ \textit{sont indépendants.}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A\cap B\cap C)=\mathbb{P}(\emptyset) &= 0\neq\mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(B)\times\mathbb{P}(C)\\ &\Rightarrow\ A,\ B\ \textit{et}\ C\ \textit{ne sont pas mutuellement indépendants.}\end{aligned}$$

Ainsi, les événements A, B et C sont indépendants deux-à-deux mais pas mutuellement.

Proposition 4.3
Si A et B sont des événements indépendants, alors : A et $\overline{B}$; $\overline{A}$ et B ; $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont également des événements indépendants.

4.5 Exercices

Exercice 4.1

1. On lance un dé cinq fois. Calcule la probabilité pour obtenir au moins une fois 6.
2. Combien de fois faut-il lancer le dé pour que la probabilité d'obtenir 6 soit au moins 0,9 ?

Exercice 4.2
On a dans une urne trois boules rouges et deux boules vertes. On tire deux boules sans les remettre. Calcule la probabilité

1. d'obtenir 2 boules vertes ;
2. d'obtenir 2 boules rouges ;
3. d'obtenir 1 verte et 1 rouge.

Exercice 4.3
Une urne contient 3 boules rouges, 4 boules vertes et 7 boules blanches.

1. On tire une boule. Quelle est la probabilité de tirer une boule verte ? de tirer une boule qui n'est pas verte ?
2. On tire trois boules (sans les remettre). Quelle est la probabilité de tirer 2 boules blanches et 1 boule verte ?
3. On tire simultanément cinq boules. Calcule la probabilité de tirer exactement 3 boules blanches ; de tirer au moins 3 boules blanches.

Exercice 4.4

Alex est un joueur de cartes professionnel. D'un jeu de 52 cartes, il doit tirer deux cartes et il a besoin de deux trèfles. Onze cartes se trouvent déjà sur la table et sont découvertes. Parmi ces cartes il voit trois trèfles. Calcule la probabilité pour Alex de tirer deux trèfles.

Exercice 4.5
On tire avec plusieurs fusils sur une cible. La probabilité d'atteindre la cible vaut pour chaque fusil 0,25. Avec combien de fusils doit-on tirer, pour que la probabilité d'atteindre la cible au moins une fois, soit égale à 0.95 ?

Exercice 4.6
On tire trois cartes (sans les remettre) dans un jeu de 36 cartes. Calcule la probabilité de tirer au moins deux rois ou deux dames.

Exercice 4.7
On tire 5 cartes (sans les remettre) dans un jeu de 52 cartes. Calcule la probabilité de tirer

1. 4 as
2. 2 rois et 3 dames.

Exercice 4.8
Un auditoire est formée de 30 étudiants. Quelle est la probabilité pour qu'au moins deux étudiants aient leur anniversaire le même jour de l'année ?

Exercice 4.9
On lance deux dés une fois. Calcule la probabilité d'obtenir la somme 12. Combien de fois faut-il lancer une paire de dés pour que la probabilité d'obtenir au moins une fois la somme 12 soit 0,5 ?

Exercice 4.10
On mélange 49 boules numérotées 1, 2, ..., 49. On tire 6 boules (sans remise).

1. Calcule la probabilité de tirer les boules 1, 2, 3, 4, 5, 6.
2. Calcule la probabilité de tirer les boules 1, 2, 3, 4.

Exercice 4.11
Dans une urne on a 4 boules rouges, 5 boules noires et 6 boules vertes. On tire 6 boules (sans remise). Calcule la probabilité de tirer

1. les 6 boules vertes ;
2. 3 boules rouges et 3 boules noires ;
3. 2 boules de chaque couleur ;
4. pas de boule verte ;
5. au moins une boule rouge.

Exercice 4.12
Slim est un joueur de cartes redoutable, car il a étudié le calcul des probabilités. Pour le jeu suivant on utilise 3 cartes, dont une avec une croix. Slim gagne, s'il tire la carte avec la croix :

Il tire d'abord une carte sans la regarder. Une autre personne regarde les deux cartes restantes et écarte une carte sans croix. Ensuite, Slim peut garder la carte qu'il a déjà tirée ou bien il peut prendre la carte qui reste. Pour quelle stratégie va-t-il se décider ? Justifie ta réponse en calculant les probabilités de tirer la carte avec croix dans les deux cas.

Exercice 4.13
Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On tire 4 fois une boule et on la remet chaque fois dans l'urne. Calcule la probabilité de tirer

1. 4 numéros différents
2. au moins deux fois le même numéro.

Exercice 4.14
On tire 6 cartes dans un jeu de 52 cartes. Calcule la probabilité de tirer

1. exactement deux rois ;
2. au moins deux rois ;
3. exactement deux rois et deux dames ;
4. au moins deux rois et deux dames.

Exercice 4.15
Pour se rendre de son domicile à son travail, NATHALIE peut utiliser deux types de transport, soit le TAC soit la moto. Les motos effectuent 30% de trajet entre la rue de NATHALIE et son lieu de travail tandis que le TAC en effectue 70%. S'il s'agit d'une moto la probabilité que la moto soit en retard est de 5% contre 7% pour le TAC. NATHALIE prend un transport au hasard dans sa rue. On notera les événements "TAC" prendre un TAC et "MOTO" prendre une moto et "R" : le transport en retard.

1. Calculez la probabilité pour qu'un transport soit en retard.
2. Si un transport est en retard, quelle est la probabilité que NATHALIE ait pris une moto.
3. Sachant qu'un transport est à l'heure, quelle est la probabilité que ce soit une moto ?.

Exercice 4.16
La production d'une usine est assurée par trois machines M_1, M_2 et M_3 qui assurent respectivement 50%, 30% et 20% de la production totale. Il est connu que 2% des articles produits par M_1, 3% de ceux produits par M_2 et 5% de ceux produits par M_3 sont défectueux. Un client achète un article provenant de cette usine et constate qu'il est défectueux. Quelle est la probabilité qu'il ait été produit par M_2.

Exercice 4.17
L'hopital de JUJUY, petite ville du Nord-Ouest de l'Argentine, compte parmi ses malades 4% qui sont d'origine basque, 58% d'origine espagnole, 32% d'origine indienne et 6% d'origine italienne. Sachant que 3% des indiens ont un sang de rhésus négatif ainsi que 87% des basques et 22% d'origine latine, quelle est la probabilité pour qu'une éprouvette de sang de rhésus négatif provienne de sang d'origine basque.

Chapitre 5

Variables aléatoires

Sommaire

5.1 Définitions

Définition 5.1 (Variable aléatoire)
Une variable aléatoire est une fonction X, allant d'un univers Ω dans un ensemble E[1].

$$\begin{aligned} X \ : \ & \Omega \longrightarrow E \\ & \omega \longrightarrow X(\omega) = x. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Définition 5.2 (Variable aléatoire réelle)
Une variable aléatoire réelle est une fonction X, allant d'un univers Ω dans un ensemble $E \subset \mathbb{R}$.

Définition 5.3 (Variable aléatoire réelle discrète)
Une variable aléatoire réelle discrète est une fonction X, allant d'un univers dans un ensemble discret $E \subset \mathbb{R}$.

Définition 5.4 (Variable aléatoire continue)
Une v.a. continue est une fonction X, allant d'un univers Ω dans $\mathbb{R}$.

Remarque 5.1
Pour simplifier, on écrit v.a. au lieu d'écrire variable aléatoire.

5.2 Variable aléatoire discrète

Dans cette section on ne s'intéresse qu'aux variables aléatoires discrètes. On rappelle

Définition 5.5 (Variable aléatoire réelle discrète)
Une variable aléatoire réelle discrète est une fonction X, allant d'un univers dans un ensemble discret $E \subset \mathbb{R}$.

Soient A une sous partie de Ω et x un réel.

L'ensemble $\{\omega \in \Omega / X(\omega) \in A\}$ est un événement. De même, l'ensemble $\{\omega \in \Omega / X(\omega) = x\}$ est aussi un événement. Pour simplifier les écritures, on notera : $\mathbb{P}(X \in A)$ au lieu de $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega / X(\omega) \in A\})$ et $\mathbb{P}(X = x)$ au lieu de $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega / X(\omega) = x\})$.

Exemple 5.1
On lance deux fois une pièce de monnaie équilibrée. L'ensemble des résultats possibles est

$$\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}.$$

Chacun des événements élémentaires de Ω a une probabilité égale à $1/4$ de se produire. Considérons la v.a. X représentant le nombre de "faces" obtenues. Donc $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

5.2.1 Loi de probabilité d'une v.a. discrète

Définition 5.6
On appelle distribution ou loi de probabilité de la v.a X l'ensemble des couples (x_i, p_i), $i \in \mathbb{N}$ telle que :

$$p_i = \mathbb{P}(X = x_i), \ i \in \mathbb{N}. \tag{5.2}$$

La loi de probabilité d'une v.a. discrète est souvent présentée sous forme d'un tableau.

1. Une variable aléatoire $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ sur un ensemble fondamental Ω est une fonction telle que l'image réciproque de chaque intervalle soit un événement.

5.2.2 Fonction de répartition d'une v.a. discrète

DÉFINITION 5.7
On appelle fonction de répartition de la v.a. (variable aléatoire) X, la fonction F définie pour tout réel x par :

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{x_i < x} \mathbb{P}(X = x_i). \tag{5.3}$$

5.2.3 Moments d'une v.a. discrète

5.2.3.1 Espérance mathématique

DÉFINITION 5.8
On appelle espérance mathématique de la v.a. X la quantité, si elle existe :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{P}(X = x_i). \tag{5.4}$$

PROPRIÉTÉ 5.1
Si on ajoute une constante à une v.a., il en est de même pour son espérance :

$$E(X + a) = E(X) + a, \forall a \in \mathbb{R}.$$

Si on multiplie une v.a. par une constante, il en est de même pour son espérance :

$$E(aX) = aE(X), \forall a \in \mathbb{R}.$$

L'espérance d'une somme de deux variables aléatoires est la somme des espérances :

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y).$$

On résume ces trois propriétés en disant que l'opérateur espérance est linéaire :

$$E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y), \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

5.2.3.2 Variance

Il s'agit d'un indicateur mesurant la dispersion des valeurs x_i autour de $E(X)$:

$$V(X) = E[X - E(X)]^2 = \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(X)]^2 \mathbb{P}(X = x_i). \tag{5.5}$$

Lorsque cette quantité existe, elle s'écrit aussi :

$$V(X) = E[X - E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2. \tag{5.6}$$

On note encore cette quantité

$$V(X) = \sigma_X^2, \tag{5.7}$$

σ_X désignant alors l'écart type de la v.a. X.

PROPRIÉTÉ 5.2
Par définition :

$$V(X) \geq 0.$$

Pour tout réel a :

$$V(X + a) = V(X) \text{ et } V(aX) = a^2 V(X).$$

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, alors :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y).$$

5.2.4 Moments non centrés et centrés d'une v.a. discrète

DÉFINITION 5.9 (MOMENTS NON CENTRÉS)
Le moment non centré (ou simple) d'ordre $r \in \mathbb{N}^*$ d'une v.a. X est la quantité, lorsqu'elle existe :

$$m_r(X) = E(X^r) = \sum_{i=1}^{n} x_i^r \mathbb{P}(X = x_i). \tag{5.8}$$

DÉFINITION 5.10 (MOMENTS CENTRÉS)
Le moment centré d'ordre $r \in \mathbb{N}^*$ d'une v.a. X est la quantité, lorsqu'elle existe :

$$\mu_r(X) = E[(X - E(x))^r] = \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(X)]^r \mathbb{P}(X = x_i). \tag{5.9}$$

5.2.5 Fonction génératrice des moments

La fonction génératrice des moments d'une v.a. X est la fonction $G_X(t)$ définie par :

$$G_X(t) = E\left(e^{tX}\right). \tag{5.10}$$

PROPRIÉTÉ 5.3

- $G_X(0) = E(1) = 1$.
- *Le moment non centré d'ordre $r \in \mathbb{N}^*$ d'une v.a. X est*

$$m_r(X) = E(X^r) = G_X^{(r)}(0).$$

- $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = G''_X(0) - [G'_X(0)]^2$.
- *Si X et Y sont deux variables aléatoires tel que :*

$$\forall t \in \mathbb{R}, G_X(t) = G_Y(t),$$

alors les deux variables aléatoires X et Y ont la même loi de probabilité.

5.2.6 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

THÉORÈME 5.1
Pour tout réel strictement positif α,

$$\mathbb{P}(|X - E(X)| \geq \alpha) \leq \frac{V(X)}{\alpha^2}.$$

5.2.7 Transformation d'une v.a. discrète

Un problème qui se pose souvent est de déterminer la loi de probabilité d'une v.a. discrète Y lorsque celle-ci est liée à une v.a. discrète $X(\Omega)$ par la relation $Y = g(X)$, où g est une fonction continue sur $X(\Omega)$ et la loi de probabilité de X étant connue.

Pour déterminer la loi de probabilité de Y , il suffit de :

1. Déterminer $Y(\Omega)$.
2. Déterminer $\mathbb{P}(Y = y_j) = \mathbb{P}(g(X) = y_j), \forall y_j \in Y(\Omega)$.

5.2.8 Lois usuelles discrètes

5.2.8.1 Loi uniforme

On dit qu'une v.a. X suit une loi uniforme discrète sur l'ensemble $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ si

1. $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.
2. $\forall k \in \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{1}{n}$.

On note :

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}_{\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}}.$$

Elle admet pour moments :

$$E(X) = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \text{ et } V(X) = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n} - [E(X)]^2. \tag{5.11}$$

Situation caractéristique : Cette loi modélise une expérience aléatoire dont les résultats sont équiprobables.

Remarque 5.2
Dans le cas particulier d'une v.a. X suivant une loi uniforme discrète sur l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$, on écrit :

$$\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}, \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}.$$

On note :

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}_{\{1,2,\ldots,n\}}.$$

Elle admet pour moments :

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \textit{ et } V(X) = \frac{n^2 - 1}{12}. \tag{5.12}$$

Exemple 5.2
Prenons l'exemple d'un lancé de dé équilibré. Soit X la v.a. égale au résultat du dé, on a :

$$X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}(X = 4) = \mathbb{P}(X = 5) = \mathbb{P}(X = 6) = \frac{1}{6}.$$

Ainsi, on peut écrire :

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}_{\{1,2,\ldots,6\}}.$$

5.2.8.2 Loi de Bernoulli

On dit qu'une v.a. X suit une loi de Bernoulli si

1. $X(\Omega) = \{0, 1\}$.
2. $\forall k \in \{0, 1\}$, $\mathbb{P}(X = k) = p^k(1 - p)^{1-k}$.

On note :

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(p).$$

Elle admet pour moments :

$$E(X) = p \text{ et } V(X) = p(1 - p). \tag{5.13}$$

Situation caractéristique : Cette loi modélise une expérience aléatoire qui a uniquement deux issues appelées « **succès** » ou « **échec** ». En effet, le chiffre 1 représente le « succès » alors que le chiffre 0 représente « l'échec ».

EXEMPLE 5.3
On lance une pièce de monnaie équilibrée. Soit la v.a. X « avoir pile », il s'agit ici d'une épreuve de Bernoulli où la probabilité d'avoir pile est $p = \frac{1}{2}$*. On dit dans ce cas que la v.a. X suit une loi de Bernoulli de paramètre* $p = \frac{1}{2}$*, et on écrit :*

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(\frac{1}{2}).$$

5.2.8.3 Loi binomiale

On dit qu'une v.a. X suit une loi binomiale de paramètres n et p si

1. $X(\Omega) = \{0, 1, \ldots, n\}$.
2. $\forall k \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}(X = k) = \complement_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.

On note :

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p).$$

Elle admet pour moments :

$$E(X) = np \text{ et } V(X) = np(1-p). \tag{5.14}$$

Situation caractéristique : Cette loi modélise une expérience aléatoire où on répète n fois de manière identique et indépendante une épreuve de Bernoulli de paramètre p, p étant la probabilité d'avoir le succès.

PROPOSITION 5.1
Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1, p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n_2, p)$, les variables aléatoires X et Y étant indépendantes, alors

$$X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1 + n_2, p).$$

REMARQUE 5.3

1. *La loi de Bernoulli est une loi binomiale particulière où* $n = 1$*.*
2. *Le coefficient binomial k parmi n, noté* $\complement_n^k$*, permet de déterminer les possibilités d'avoir k succès parmi n épreuves. On peut calculer les coefficients binomiaux grâce à la formule suivante :*

$$\complement_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

EXEMPLE 5.4
La probabilité qu'un tireur atteigne sa cible est de $0,25$*. En supposant qu'il tire* 7 *fois, quelle est la probabilité qu'il atteigne sa cible au-moins deux fois.* ***R/*** $\mathbb{P}(x \geq 2) = 55,5\%$.

EXEMPLE 5.5
Un homme est un albinos et sa femme hétérozygote par ce même caractère. Quelle est la probabilité que ce couple au cours de 10 *naissances ait au moins* 3 *albinos ?.* ***R/*** $\mathbb{P}(x \geq 3) = 94\%$.

5.2.8.4 Loi géométrique

On dit qu'une v.a. X suit une loi géométrique de paramètre p si

1. $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
2. $\forall k \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$.

On note :

$$X \hookrightarrow \mathcal{G}(p).$$

Elle admet pour moments :

$$E(X) = \frac{1}{p} \text{ et } V(X) = \frac{(1-p)}{p^2}. \tag{5.15}$$

Situation caractéristique : La loi géométrique modélise le rang du premier succès en répétant une épreuve de Bernoulli de manière identique et indépendante à l'infini (théoriquement).

Exemple 5.6
On lance continuellement un dé non truqué jusqu'à obtenir un six. Désignons par X la v.a. représentant le nombre de lancers nécessaires pour obtenir un six. Dans ce cas, la v.a. X suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{6}$, et on écrit :

$$X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{6}\right).$$

5.2.8.5 Loi de Poisson

On dit qu'une v.a. X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ si

1. $X(\Omega) = \mathbb{N}$.
2. $\forall k \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$.

On note :

$$X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda).$$

Elle admet pour moments :

$$E(X) = V(X) = \lambda. \tag{5.16}$$

Situation caractéristique : La loi de Poisson modélise des phénomènes rares, elle peut être aussi utilisée pour approximer la loi binomiale comme nous allons le voir dans la sous-section 5.2.9.

Proposition 5.2
Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_2)$, les variables aléatoires X et Y étant indépendantes, alors

$$X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2).$$

Exemple 5.7
La probabilité d'atteindre la cible par un tireur étant de $0,01$; calculer la probabilité qu'au cours de 200 essais indépendants :

1. *La cible soit atteinte au moins une fois.*
2. *La cible soit atteinte six fois*

Exemple 5.8
Soit une boite avec 200 *fusibles. La probabilité qu'un fusible soit défectueux est de* 2%. *Quelle est la probabilité de trouver au maximum* 5 *fusibles défectueux.*

Exemple 5.9
Dans un livre de 500 *pages on trouve* 200 *fautes d'impression distribuées au hasard. Calculez la probabilité que la page* 235 *contienne* 2 *fautes d'impression.*

5.2.9 Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson

La loi binomiale dépend de deux paramètres n et p, alors que la loi de Poisson ne dépend que d'un seul paramètre λ. Pour qu'une loi binomiale soit au plus proche d'une loi de Poisson, on doit au moins souhaiter que ces deux lois aient la même espérance. L'espérance de la loi binomiale étant np et celle de la loi de Poisson étant λ, il faut que $\lambda = np$. Cette condition nécessaire n'est pas suffisante pour réaliser une telle approximation, théoriquement l'approximation est parfaite lorsque :

$$\begin{cases} n \to +\infty \\ p \to 0 \\ np = \text{ constante.} \end{cases}$$

En pratique, la condition :

$$\begin{cases} n > 30 \\ np < 5. \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} n > 50 \\ p < 0,1. \end{cases}$$

est suffisante pour envisager l'approximation.

Exemple 5.10
On considère une loi binomiale de paramètres $n = 35$ *et* $p = 0,1$. *On est dans les conditions d'approximation de cette loi par une loi de Poisson de paramètre* $\lambda = 0,1 \times 35 = 3,5$.

5.2.10 Fonction génératrice des moments d'une v.a. discrète

La fonction génératrice des moments d'une v.a. discrète X est donné par :

$$G_X(t) = E\left(e^{tX}\right) = \sum_{k \in X(\Omega)} e^{tk}\mathbb{P}(X = k). \tag{5.17}$$

Exemple 5.11
La fonction génératrice des moments d'une v.a. $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ *:*

$$\begin{aligned} G_X(t) = E(e^{tX}) &= \sum_{k=0}^{1} e^{tk}\mathbb{P}(X = k) \\ &= e^{t\times 0}(1-p) + e^{t\times 1}p \\ &= (1-p) + pe^t. \end{aligned}$$

La fonction génératrice des moments d'une v.a. $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ *:*

$$\begin{aligned} G_Y(t) = E(e^{tY}) &= \sum_{k=1}^{+\infty} e^{tk}\mathbb{P}(Y=k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} e^{tk}p(1-p)^{k-1} \\ &= \frac{p}{1-p}\sum_{k=1}^{+\infty}\Big((1-p)e^t\Big)^k. \\ &= \frac{p}{(1-p)}\frac{1}{(1-(1-p)e^t)}. \end{aligned}$$

5.3 Variable aléatoire continue

5.3.1 Variable aléatoire continue

Définition 5.11 (Variable aléatoire continue)
Une v.a. continue est une fonction X*, allant d'un univers* Ω *dans* $\mathbb{R}$*.*

Définition 5.12 (Densité de probabilité)
Soit X *une v.a. continue. On appelle densité de probabilité de* X*, une application positive et intégrable* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$*, vérifiant :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1. \tag{5.18}$$

5.3.2 Loi de probabilité d'une v.a. continue

La loi de probabilité d'une v.a. continue est déterminée par la fonction de répartition F, définie pour tout réel x par :

$$F(x) = \mathbb{P}(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx. \tag{5.19}$$

La probabilité d'un intervalle s'obtient en intégrant la densité de X, ou bien en utilisant la fonction de répartition :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X\in[x_1,x_2]) &= \mathbb{P}(x_1 \le X \le x_2) \\ &= \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt \\ &= F(x_2)-F(x_1). \end{aligned}$$

Propriété 5.4 (Propriétés de la fonction de répartition)

1. *Elle est croissante au sens large et prend ses valeurs entre 0 et 1 :*

$$0 \le F(x) \le 1 \text{ avec } \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1.$$

2. *Elle est continue à gauche :*

$$\lim_{h\to 0^+} F(x-h) = F(x).$$

Remarque 5.4
Si X *est une v.a. continue, alors, pour tout réel* x*,* $\mathbb{P}(X=x)=0$*, et on dit que la loi est* ***diffuse****.*

5.3.3 Moments d'une v.a. continue

5.3.3.1 Espérance mathématique

Elle est définie par :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx, \tag{5.20}$$

lorsque cette intégrale existe. Pour tout réel a :

$$E(X + a) = E(X) + a \text{ et } E(aX) = aE(X).$$

Si X et Y sont deux variables aléatoires qui admettent une espérance, alors :

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y).$$

5.3.3.2 Variance

Elle est définie par :

$$V(X) = E[X - E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2, \tag{5.21}$$

lorsque la variance existe. Pour tout réel a :

$$V(X + a) = V(X) \text{ et } V(aX) = a^2 V(X).$$

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes admettant une variance, alors :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y).$$

5.3.4 Moments non centrés et centrés d'une v.a. continue

DÉFINITION 5.13 (MOMENTS NON CENTRÉS)
Le moment non centré d'ordre $r \in \mathbb{N}^*$ d'une v.a. continue X est la quantité, lorsqu'elle existe :

$$m_r(X) = E(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x) dx. \tag{5.22}$$

DÉFINITION 5.14 (MOMENTS CENTRÉS)
Le moment centré d'ordre $r \in \mathbb{N}^*$ d'une v.a. continue X est la quantité, lorsqu'elle existe :

$$\mu_r(X) = E[(X - E(X))^r] = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^r f(x) dx. \tag{5.23}$$

5.3.5 Lois usuelles continues

5.3.5.1 Loi uniforme

Une v.a. X suit une loi uniforme si sa densité est constante sur un intervalle $[a, b]$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{si } a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{5.24}$$

On écrit $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{[a,b]}$. Sa fonction de répartition est définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, \text{ si } a \leq x \leq b, \\ 1, \text{ si } x > b. \end{cases} \tag{5.25}$$

Elle admet pour moments :

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \text{ et } V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}. \tag{5.26}$$

5.3.5.2 Loi exponentielle

La loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ est celle d'une variable positive de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, \text{ si } x \geq 0, \\ 0, \text{ sinon.} \end{cases} \tag{5.27}$$

On écrit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. Sa fonction de répartition est définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, \text{ si } x \geq 0, \\ 0, \text{ sinon }. \end{cases} \tag{5.28}$$

Elle admet pour moments :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \text{ et } V(X) = \frac{1}{\lambda^2}. \tag{5.29}$$

5.3.5.3 Loi normale ou de Laplace-Gauss

C'est la loi d'une v.a. X à valeurs dans $\mathbb{R}$, de densité :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}. \tag{5.30}$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma)$ avec $E(X) = m$ et $V(X) = \sigma^2$. Ainsi les paramètres d'une loi normale sont en fait son espérance mathématique et son écart-type.

Remarque 5.5
Une v.a. suivant la loi normale est dite ***variable gaussienne****.*

Proposition 5.3
Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(m', \sigma')$. Alors, pour tous $\forall a, b \in \mathbb{R}$:

- La v.a. $aX + b \hookrightarrow \mathcal{N}(am + b, |a|\sigma)$.
- La v.a. $X + Y \hookrightarrow \mathcal{N}(m + m', \sqrt{\sigma^2 + \sigma'^2})$.
- La v.a. $X - Y \hookrightarrow \mathcal{N}(m - m', \sqrt{\sigma^2 + \sigma'^2})$.

Exemple 5.12
Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(1, \sqrt{3})$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(-1, 1)$, alors :

- *La v.a. $-2X + 5 \hookrightarrow \mathcal{N}(3, 2\sqrt{3})$.*
- *La v.a. $X + Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 2)$.*

- *La v.a.* $X - Y \hookrightarrow \mathcal{N}(2, 2)$.

Définition 5.15 (Loi normale centrée réduite)
La loi normale centrée réduite est une loi normale de paramètre $m = 0$ *et* $\sigma = 1$. *On la note par* $\mathcal{N}(0, 1)$ *et sa densité de probabilité est définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}. \tag{5.31}$$

Proposition 5.4
Si une v.a. X suit la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$, alors la v.a. $Z = \dfrac{X - m}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$. En particulier, on a :

$$E(Z) = 0 \text{ et } \sigma(Z) = 1.$$

Ce résultat est très important, puisqu'il nous suffit d'étudier la loi normale centrée réduite puis de procéder à un changement de variable pour obtenir n'importe quelle loi normale.

Calcul des probabilités avec la loi normale centrée réduite

Théoriquement, si $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$, sa fonction de répartition est donnée par la formule :

$$F_Z(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx. \tag{5.32}$$

Or, le calcul de cette intégrale est trop long pour être une méthode efficace d' utilisation de la loi normale. Pour éviter les calculs, on dispose de la Table 5.1 de la loi normale centrée réduite pour calculer les probabilités.

Utilisation de la table de la loi normale centrée réduite

Cette table indique les valeurs de $\mathbb{P}(Z < t)$ pour $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ et $0 \leq t \leq 4$. La première colonne indique le premier chiffre après la virgule de t et la première ligne indique le second chiffre après la virgule. Par exemple pour calculer $\mathbb{P}(Z < 1, 64)$, on cherche dans la première colonne 1, 6 puis dans la première ligne 0, 04, à l'intersection de cette ligne et de cette colonne, on trouve :

$$\mathbb{P}(Z < 1, 64) = 0, 9495.$$

t	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,5279	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,5438	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,6293	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,6591	0,66276	0,6664	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,7054	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,7224
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,7549
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,7673	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,7823	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,8665	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,879	0,881	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,9032	0,9049	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,9222	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,9452	0,9463	0,94738	0,94845	0,9495	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,9608	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,9732	0,97381	0,97441	0,975	0,97558	0,97615	0,9767
2	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,9803	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,983	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,985	0,98537	0,98574
2,2	0,9861	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,9884	0,9887	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,9901	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,9918	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,9943	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,9952
2,6	0,99534	0,99547	0,9956	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,9972	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,9976	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,999
3,1	0,99903	0,99906	0,9991	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,9994	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,9995
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,9996	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,9997	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,9998	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,9999	0,9999	0,9999	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

TABLE 5.1 – Table de la loi normale centrée réduite

PROPOSITION 5.5

Soit Z une v.a. suivant une loi normale centrée réduite et F_Z sa fonction de répartition, on a :

1. $\mathbb{P}(Z \geq t) = 1 - F_Z(t)$.
2. Si t est positif : $F_Z(-t) = 1 - F_Z(t)$.
3. Pour tous a, $b \in \mathbb{R}$, avec $a \leq b$:

$$\mathbb{P}(a \leq Z \leq b) = F_Z(b) - F_Z(a).$$

4. Pour tout $t \geq 0, \mathbb{P}(-t \leq Z \leq t) = 2F_Z(t) - 1$.

5.3.5.4 Loi gamma

Une v.a. X de loi gamma de paramètres $n > 0$ et $\lambda > 0$ est positive, de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{n-1}}{\Gamma(n)}\lambda^n e^{-\lambda x}, \text{ si } x \geq 0, \\ 0, \text{ sinon.} \end{cases} \tag{5.33}$$

La fonction gamma est définie pour tout $n > 0$ par :

$$\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-x}dx = (n-1)! \tag{5.34}$$

On écrit $X \hookrightarrow \Gamma(n, \lambda)$. Elle admet pour moments :

$$E(X) = \frac{n}{\lambda} \text{ et } V(X) = \frac{n}{\lambda^2}. \tag{5.35}$$

PROPOSITION 5.6
Si $X \hookrightarrow \Gamma(n_1, \lambda)$ et $Y \hookrightarrow \Gamma(n_2, \lambda)$ sont des variables aléatoires indépendantes, alors

$$X + Y \hookrightarrow \Gamma(n_1 + n_2, \lambda).$$

REMARQUE 5.6
La loi gamma $\Gamma(1, \lambda)$ n'est autre que la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

5.3.5.5 Loi gamma

La loi du khi-deux à n degrés de liberté, notée $\chi^2(n)$, est la loi $\Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$ où n est un entier positif. Ses moments se déduisent de ceux de la loi gamma

$$E(X) = \frac{\frac{n}{2}}{\frac{1}{2}} = n \text{ et } V(X) = \frac{\frac{n}{2}}{\frac{1}{2}} = 2n. \tag{5.36}$$

PROPOSITION 5.7
Si $X \hookrightarrow \chi^2(n_1)$ et $Y \hookrightarrow \chi^2(n_2)$ sont des variables aléatoires indépendantes, alors

$$X + Y \hookrightarrow \chi^2(n_1 + n_2).$$

PROPRIÉTÉ 5.5
Notons une propriété importante qui peut servir de définition de cette loi : Si X_1, X_2, ..., X_n sont des variables aléatoires indépendantes suivant la loi normale centrée réduite, alors la v.a.

$$X = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$$

suit une loi du khi-deux à n degrés de liberté.

5.3.6 Approximation de la loi binomiale par la loi normale

La loi binomiale n'est pas toujours simple d'utilisation. Par exemple, le calcul des combinaisons dans la loi binomiale de paramètre $n = 150$ et $p = 0,05$ est très long. En effet, si on cherche à calculer $\mathbb{P}(X < 58)$, on va devoir calculer $\mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) + ... + \mathbb{P}(X = 57)$, ce qui représente 58 calculs en tout. Calculer $\mathbb{P}(X < 58)$ est bien plus simple par lecture de la table de la loi normale centrée réduite. Il est donc légitime de

chercher à faire des approximations de lois.
On considère que la loi binomiale de paramètres n et p peut être approximée par une loi normale de moyenne $m = np$ et d'écart-type $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$ lorsque

$$\begin{cases} n \geq 30, \\ np \geq 5, \\ n(1-p) \geq 5. \end{cases}$$

Autrement dit, n doit être assez grand, et p ne pas être trop proche de 0 ou 1.

Correction de continuité

La correction de continuité s'applique lorsqu'on approche une loi de probabilité discrète par une loi de probabilité continue, comme c'est le cas pour l'approximation de la loi binomiale par la loi normale. Ainsi,

- La probabilité $\mathbb{P}(X = k)$ doit se réécrire $\mathbb{P}(k - 0,5 < X < k + 0,5)$.
- La probabilité $\mathbb{P}(a \leq X \leq b)$ doit se réécrire $\mathbb{P}(a - 0,5 < X < b + 0,5)$.
- La probabilité $\mathbb{P}(a < X < b)$ doit se réécrire $\mathbb{P}(a + 0,5 < X < b - 0,5)$.

5.3.7 Transformation d'une v.a. continue

Pour déterminer la loi de probabilité d'une v.a. Y , lorsque celle-ci est liée à une v.a. X par la relation

$$Y = g(X),$$

où g est une fonction continue sur $X(\Omega)$ et la fonction de densité de probabilité de X étant connue, il suffit de :

1. Déterminer $Y(\Omega)$.
2. Calculer sa fonction de répartition :

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(g(X) \leq y).$$

3. En déduire sa densité de probabilité $f_Y(y)$:

$$f_Y(y) = F'_Y(y).$$

5.3.8 Fonction génératrice des moments d'une v.a. continue

La fonction génératrice des moments d'une v.a. continue X de densité $f(x)$ est donné par :

$$G_X(t) = E\left(e^{tX}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)dx. \tag{5.37}$$

Exemple 5.13
La fonction génératrice des moments d'une v.a. $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{[a,b]}$ *est*

$$\begin{aligned} G_X(t) &= E\left(e^{tX}\right) \\ &= \int_a^b e^{tx}\frac{1}{b-a}dx \\ &= \frac{1}{b-a}\int_a^b e^{tx}dx \\ &= \frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{t}e^{tx}\right]_a^b \\ &= \frac{e^{tb}-e^{ta}}{(b-a)t}. \end{aligned}$$

La fonction génératrice des moments d'une v.a. $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ *est :*

$$\begin{aligned} G_Y(t) &= E\left(e^{tY}\right) \\ &= \int_0^{+\infty} e^{ty}\lambda e^{\lambda y}dy \\ &= \int_0^{+\infty} \lambda e^{(t-\lambda)y}dy \\ &= \frac{\lambda}{t-\lambda}\left[e^{(t-\lambda)y}\right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{\lambda}{\lambda-t} \text{ pour } t<\lambda. \end{aligned}$$

5.4 Exercices

1. Variable aléatoire discrète

Exercice 5.1
Une urne contient sept boules : une rouge, deux jaunes et quatre vertes. Un joueur tire au hasard une boule, si la boule est rouge, il gagne 10 points, si elle est jaune, il perd 5 points, si elle est verte, il tire sans remise une deuxième boule de l'urne, si cette deuxième boule est rouge, il gagne 8 points, sinon il perd 4 points.

Soit X la v.a. associant à chaque tirage le gain algébrique du joueur.

1. Déterminer la loi de probabilité de la v.a. X.
2. Calculer l'espérance et la variance de la v.a. X.
3. Les conditions de jeu restent identiques. Indiquer le montant du gain algébrique qu'il faut attribuer à un joueur lorsque la boule tirée au deuxième tirage est rouge, pour que l'espérance de la v.a. X soit nulle.

Exercice 5.2
On lance trois fois une pièce de monnaie équilibrée et on note X la v.a. représentant le nombre de faces obtenues.

1. Déterminer la loi de probabilité de la v.a. X.
2. Soit la v.a. $Y = X^2 - 1$. Déterminer la loi de probabilité de la v.a. Y et donner sa fonction de répartition.

Exercice 5.3
Dans un jeu, un joueur doit choisir entre deux questions, une question facile et une question difficile.

S'il répond juste à la première question, il peut tenter de répondre à l'autre question. La question facile rapporte au joueur 1000 FC et la question difficile lui rapporte 3000 FC. Les questions sont indépendantes, et on estime avoir 30% de chances de bien répondre à la question difficile, et 60% de chances de répondre à la question facile.

Soit X la v.a. égale au gain du jeu.

1. Dans le cas où il choisit de répondre à la question facile en premier, quelle est la loi de probabilité de la v.a. X ? Que vaut le gain moyen dans ce cas ?
2. Même question, si le joueur choisit de répondre à la question difficile en premier.
3. Que peut-on déduire ?

Exercice 5.4
Pour ses besoins en gestion, un fabricant de montres électroniques a fourni les données suivantes à un cabinet de conseils :

- À la sortie d'usine, le quart des montres fabriquées sont défectueuses, elles sont par conséquent renvoyées à l'atelier pour réparation. Le reste est mis en vente.
- La moitié des montres renvoyées à l'atelier sont réparées et mises en vente, le reste est détruit.
- Le prix de revient de la production d'une montre est de 5000 $.
- Le coût de réparation d'une montre est de 300 $.

À la sortie d'usine, nous avons choisi une montre au hasard.

1. Calculer la probabilité que la montre soit vendue.

   Soit X la v.a. qui représente le prix de vente d'une montre électronique, et soit Y la v.a. qui représente le bénéfice réalisé à la vente d'une montre.
2. À partir de quel prix de vente unitaire le fabricant espère-t-il réaliser des bénéfices ?
3. Si le fabricant vend la montre à 5300 $, quel sera son bénéfice (ou perte) par montre vendue ?

2. Lois discrètes

Exercice 5.5
On place une souris dans une cage. Elle se trouve face à 4 portillons dont un seul lui permet de sortir de la cage. A chaque essai infructueux, la souris reçoit une décharge électrique et on la replace à l'endroit initial. On suppose que la souris mémorise les essais infructueux et choisit de façon équiprobable entre les portillons qu'elle n'a pas encore essayé. Soit X la v.a. représentant le nombre d'essais pour sortir de la cage.

1. Déterminer la loi de probabilité de la v.a. X. Reconnaître la loi.
2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 5.6
Une entreprise produit en grande quantité des stylos. La probabilité qu'un stylo présente un défaut est égale à $0,1$. On prélève dans cette production, successivement et avec remise huit stylos. On note X la v.a. qui compte le nombre de stylos présentant un défaut parmi les huit stylos prélevés.

1. Quelle est la loi de probabilité de la v.a. X ?
2. Quelle est la probabilité qu'il n'y a aucun stylo avec un défaut ?
3. Quelle est la probabilité qu'il y a au moins un stylo avec un défaut ?
4. Quelle est la probabilité qu'il y a moins de deux stylos avec un défaut ?

Exercice 5.7
Un épicier reçoit un lot de pommes dont 25% sont avariées. Il charge un employé de préparer des emballages de 5 pommes chacun. Celui-ci, négligent, ne se donne pas la peine de jeter les fruits avariés. Chaque client qui trouve, dans l'emballage qu'il achète, 2 fruits ou plus qui sont avariés, revient au magasin se plaindre. Soit X la v.a. représentant le nombre de pommes avariées dans un emballage.

1. Déterminer la loi de probabilité de la v.a. X.
2. Quelle est la probabilité d'avoir une seule pomme avariée dans l'emballage ?
3. Quelle est la probabilité pour qu'un client donné se plaigne auprès de son épicier ?
4. Si l'épicier a 100 clients qui achètent des pommes ce jour-là, combien y aura-t-il de plaintes ?

Exercice 5.8
On suppose que le pourcentage de gauchers est de 1%. Soit X la v.a. prenant comme valeurs le nombre de gauchers dans un échantillon de 200 personnes choisies au hasard.

1. Quelle est la loi de probabilité de la v.a. X ?
2. Par quelle loi peut-on approximer la loi de probabilité de la v.a. X ?
3. Quelle est la probabilité pour qu'il y ait plus de 4 gauchers dans l'échantillon ?

Exercice 5.9
Une usine produit et commercialise 40 téléviseurs par mois. Le coût de fabrication d'un téléviseur est de 5000 $. L'usine fait réaliser un test de conformité sur chacun de ses téléviseurs. Le test est positif dans 95% des cas et un téléviseur reconnu conforme peut être vendu k $. Si le test est en revanche négatif, le téléviseur est bradé au prix de 2500 $. Soit X la v.a. qui indique le nombre de téléviseurs conformes parmi les 40 téléviseurs produits par l'usine.

1. Quelle est la loi de probabilité de la v.a. X ? Donner son expression et calculer son espérance.
2. Quelle est la probabilité que tous les téléviseurs soient conformes ?
3. Quelle est la probabilité qu'au maximum 38 téléviseurs soient conformes ?
4. On note Y la v.a. qui indique le bénéfice mensuel en Dollars.
   (a) Donner l'expression de Y (en fonction de X et k).
   (b) Calculer l'espérance de Y (en fonction de k).
   (c) Quelle doit être la valeur minimale de k pour que l'usine ne fasse pas faillite ?

Exercice 5.10
Dans une entreprise, une machine produit des pièces dont les dimensions très précises doivent être respectées. On examine n pièces choisies au hasard et on note X la v.a. représentant le nombre de pièces défectueuses.

1. Après un premier réglage, on constate une proportion de 30% de pièces défectueuses. Pour n = 5 :
   (a) Quelle est la loi de probabilité de la v.a. X ? Calculer son espérance et son écart-type.
   (b) Quelle est la probabilité que deux pièces soient défectueuses ?
   (c) Quelle est la probabilité qu'il n'y ait pas plus d'une pièce défectueuse ?
   (d) Déterminer la valeur de X la plus probable. Calculer la probabilité associée.
2. Après un second réglage, la proportion des pièces défectueuses devient 5%. Pour n = 100 :
   (a) Par quelle loi peut-on approximer la loi de probabilité de la v.a. X ? Justifiez votre réponse.
   (b) Calculer la probabilité de ne pas trouver de pièces défectueuses.
   (c) Calculer la probabilité d'obtenir deux pièces défectueuses.
   (d) Calculer la probabilité que le nombre de pièces défectueuse soit compris entre 2 et 4 (au sens large).

3. Variable aléatoire continue

Exercice 5.11
Déterminer si les fonctions suivantes sont des densités de probabilité et si oui, déterminer la fonction de répartition associée à cette densité.

1. $f(x) = \begin{cases} 4xe^{-2x}, \text{ si } x \geq 0 \\ 0, \text{ si } x < 0. \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4\ln(x)}{x^3}, \text{ si } x \geq 1 \\ 0, \text{ si } x < 1. \end{cases}$

Exercice 5.12
On considère la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}(1-x)^{\frac{1}{3}}, \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, \text{ sinon }. \end{cases}$$

1. Montrer que f est bien une densité de probabilité.
2. Déterminer sa fonction de répartition F.
3. Calculer $\mathbb{P}(0,488 < X \leq 1,2)$.

Exercice 5.13
Soit X une v.a. continue de densité de probabilité $f(x)$ donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} ce^{-2\alpha x}(1-e^{-\alpha x}), \text{ si } x \geq 0 \\ 0, \text{ sinon }. \end{cases}$$

où α est une constante connue strictement positive et c une constante réelle à déterminer.

1. Montrer que la constante c est égale à 6α.
2. Calculer la fonction de répartition de la v.a. X .
3. Pour $\alpha = 1$, calculer les probabilités suivantes :
$$\mathbb{P}(-1 \leq X \leq 2,5), \mathbb{P}(1,5 < X \leq 3,75), \mathbb{P}(X > 6).$$
4. Soit la v.a. $Y = e^{-\alpha X}$.
   (a) Trouver la densité de probabilité de la v.a. Y .
   (b) Déterminer la fonction de répartition de la v.a. Y .
   (c) Calculer les probabilités suivantes :
$$\mathbb{P}(Y \leq 0,5), \mathbb{P}(0,25 < Y \leq 1), \mathbb{P}(|Y - 0,5| \geq 0,1).$$

Remarque 5.7
L'intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle symétrique est nulle.

Exercice 5.14
La durée de vie en années d'un ordinateur est une v.a. notée X suivant la loi exponentielle de paramètre λ.

1. Sachant que $\mathbb{P}(X > 10) = 0,286$, déterminer la valeur de λ.
2. Calculer la probabilité qu'un ordinateur ait une durée de vie inférieure à 6 mois.
3. Sachant qu'un ordinateur a déjà fonctionné huit années, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à 10 ans.

Exercice 5.15
La distance (en mètres) parcourue par un projectile suit une loi normale. Au cours d'un entraînement, on constate que :

- La probabilité qu'un projectile dépasse 60 mètres est 0,0869.
- La probabilité qu'un projectile parcoure une distance inférieure à 45 mètres est 0,6406.

Calculer la distance moyenne parcourue par un projectile, ainsi que l'écart-type de celle-ci.

Exercice 5.16
Une enquête a été menée auprès de ménages de 4 personnes en vue de connaître leur consommation de lait sur 1 mois. On suppose que sur l'ensemble des personnes interrogées, la consommation a une distribution de type "Normale" avec une moyenne de 20 litres et un écart-type de 5 litres. Dans le cadre d'une campagne publicitaire, on souhaite connaître :

1. Le pourcentage des faibles consommateurs (moins de 10 litres par mois)
2. Le pourcentage des grands consommateurs (plus de 30 litres par mois).
3. La consommation maximale de 50% des consommateurs.
4. Au dessus de quelle consommation se trouvent 33% des consommateurs.

Annexe : Si $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, on donne : $F_Z(2) = 0,9772$. $F_Z(0.44) = 0,67$.

Exercice 5.17
Dans un livre de 500 pages, on trouve 200 fautes d'impression distribuées au hasard. Calculer la probabilité que la page 235 contienne 2 fautes d'impression.

Exercice 5.18
Dans une entreprise, une machine produit des pièces dont les dimensions très précises doivent être respectées. la proportion des pièces défectueuses est de 3%. On examine 1000 pièces choisies au hasard et on note X la v.a. représentant le nombre de pièces défectueuses.

1. Par quelle loi peut-on approximer la loi de probabilité de la v.a. X ? Justifiez votre réponse.
2. Calculer la probabilité d'avoir plus de 50 pièces défectueuses.
3. Calculer la probabilité d'avoir entre 20 et 40 pièces défectueuses.
4. Calculer la probabilité pour que la différence absolue entre le nombre de pièces défectueuses et la moyenne soit inférieur ou égale à 15.

Exercice 5.19
Soit X une variable aléatoire dont la fonction de densité est

$$f_X(x) = \begin{cases} c(1-x^2), \text{ si } -1 < x < 1, \\ 0, \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Calculer la valeur de c
2. Calculer$E(X)$ et $\sigma(X)$.

Exercice 5.20
Soit X une v.a. continue de densité :

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{x+1}, \text{ si } 0 \leq x \leq e-1, \\ 0, \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Calculer k pour que f soit une densité de probabilité.
2. Calculer $\mathbb{P}(X \geq 1)$ et $\mathbb{P}(0,7 \leq X \leq 1,7)$.
3. Calculer $E(X)$ et $V(X)$ si elles existent.
4. Déterminer la fonction de répartition F de la v.a. X.
5. Déterminer la loi de la v.a. $Y = \ln(1+X)$.
6. Monter que la v.a. $Z = -2\ln Y$ suit une loi du khi-deux, préciser son degré de liberté.

Exercice 5.21
Tous les jours, un étudiant parcourt le même trajet de 40 Km pour se rendre à son université. Sa vitesse est une v.a. V qui dépend des conditions météorologiques et de la circulation. Sa densité est de la forme :

$$f_V(x) = \begin{cases} \lambda^2 x e^{-\lambda x}, \text{ si } x \geq 0, \lambda > 0, \\ 0, \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Reconnaître la loi de probabilité de la v.a. V. Déterminer la valeur de λ sachant que l'étudiant roule à une vitesse moyenne de 80 Km/h.
2. Calculer la fonction de répartition de la v.a. V .
3. Sur la route empruntée par l'étudiant, la vitesse est limitée à 120 Km/h, un radar mesure la vitesse de toutes les automobiles. Quelle est la probabilité pour que l'étudiant paye une amende pour excès de vitesse ?
4. La durée du trajet est décrite par la v.a. $T = \dfrac{40}{V}$.
5. Déterminer la densité ainsi que l'espérance mathématique de la v.a. T.
6. On pose $U = 2\lambda V$. Déterminer la densité de la v.a. U. De quelle loi usuelle s'agit-il ?

. . . .

Fin

. . . .

Table des matières