Guide des Travaux Pratiques : ALGÈBRE LINÉAIRE et GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

A l'attention des étudiants studieux et travailleurs de Propédeutique

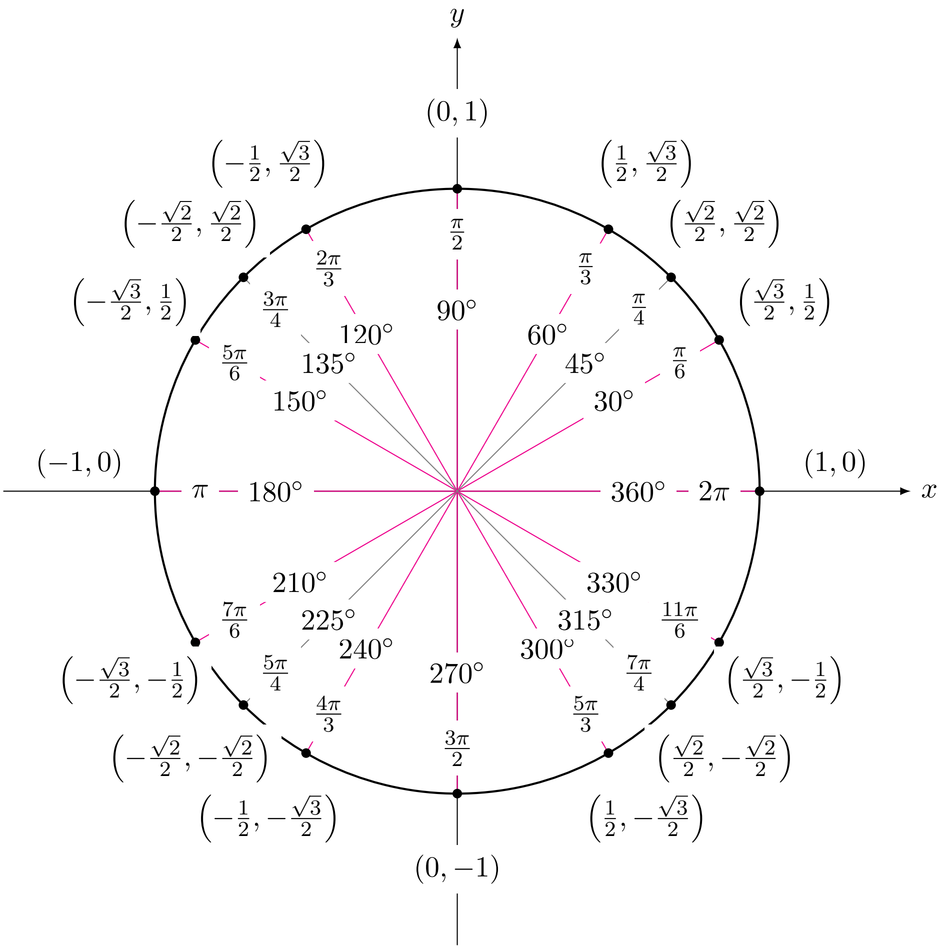
Année académique 2022-2023

ÉCOLE DES MINES

UOB-BUKAVU

Prof Lucien ZIHINDULA BIGURU   Ass. Emmanuel NYANDU KAGARABI

"En mathématiques, on ne comprend pas les choses, on s'y habitue". John Von Neuman.



Première partie

Algèbre Linéaire

Chapitre 1

L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes

1.1 Synthèse essentielle

$\Big($ **Cfr syllabus** THÈME 1 ALGÈBRE LINÉAIRE. $\Big)$

I. Formes usuelles d'un nombre complexe

$$\boxed{z = \underbrace{a+bi}_{\text{Forme algébrique}} = \underbrace{r(\cos\theta + i\sin\theta)}_{\text{Forme trigonométrique}} = \underbrace{re^{i\theta}}_{\text{Forme exponentielle}}, \text{ avec } r=\sqrt{a^2+b^2}\geq 0,\ a = r\cos\theta \text{ et } b = r\sin\theta.}$$

II. Rapports trigonométriques des angles remarquables

	Quadrant I					Quadrant II				Quadrant III				Quadrant IV			
Grades	0	$\frac{100}{3}$	50	$\frac{200}{3}$	100	$\frac{400}{3}$	150	$\frac{500}{3}$	200	$\frac{700}{3}$	250	$\frac{800}{3}$	300	$\frac{1000}{3}$	350	$\frac{1110}{3}$	400
Radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
Degrés	0	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-$\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{3}$	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\cot\theta$	$+\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$-\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$+\infty$
$\sec\theta$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	$+\infty$	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{2}$	-2	$-\infty$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1
$\mathrm{co}\sec\theta$	$+\infty$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	$+\infty$	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{2}$	-2	$+\infty$

TABLE 1.1 – Rapports trigonométriques des angles remarquables

III. Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe

Le nombre complexe $u = z_k$ est racine $n^{\text{ième}}$ du nombre complexe z $\Leftrightarrow$ $\boxed{u^n = z}$, où n est un entier strictement positif. On parle de racines carrées ($n = 2$), racines cubiques ($n = 3$), racines quatrièmes ($n = 4$),. . . La forme exponentielle se prête aisément au calcul des racines $n^{\text{ièmes}}$.

> Le nombre complexe $z = re^{i\theta}(r \geq 0)$ possède n racines $n^{\text{ièmes}}$, à savoir $\boxed{z_k = \sqrt[n]{r}\cdot e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}}$ où $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

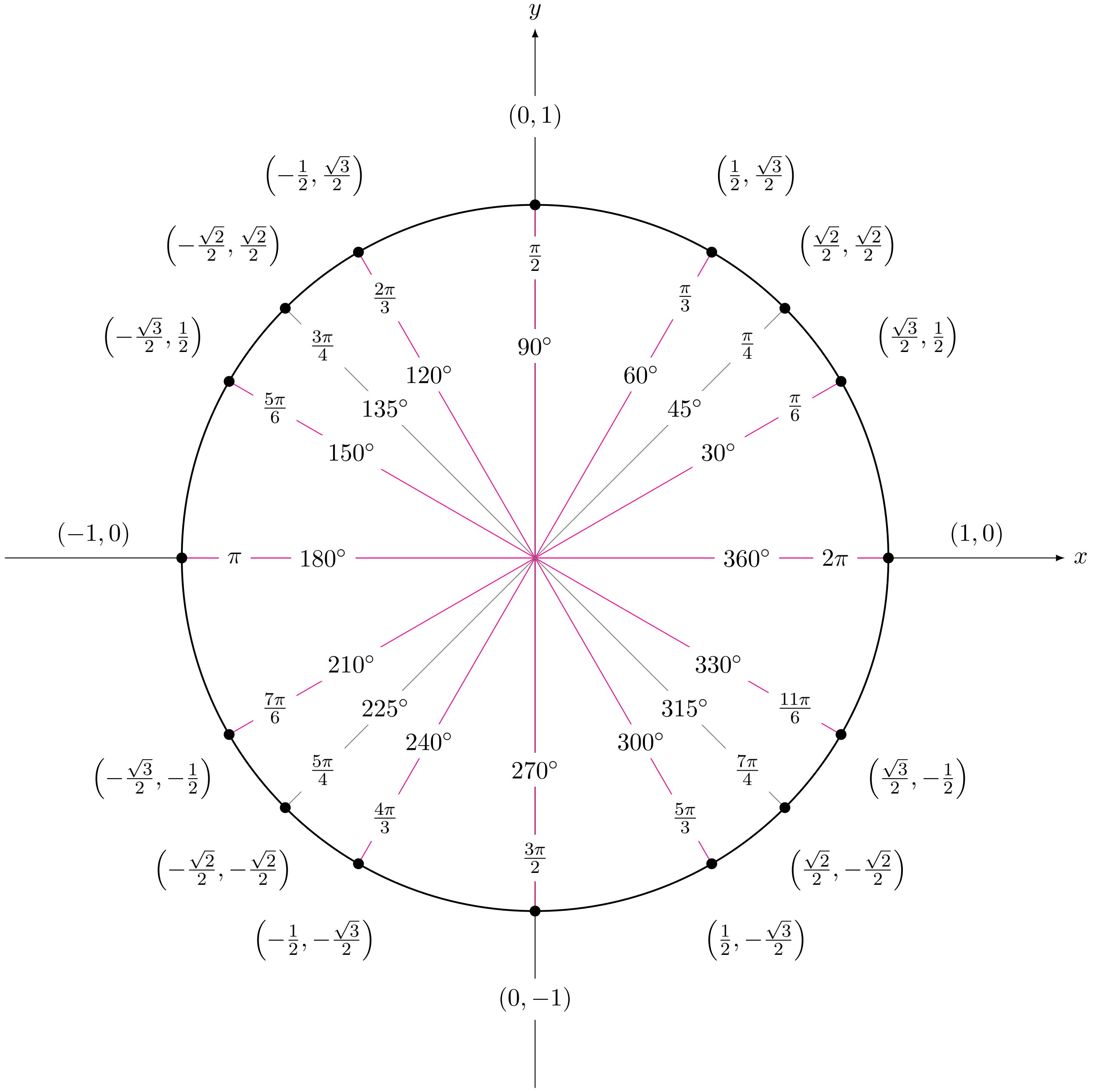


FIGURE 1.1 – Rapports trigonométriques des angles remarquables.

1.2 Exercices d'application : Cfr syllabus THEME 1.

Chapitre 2

Systèmes d'équations linéaires

2.1 Synthèse essentielle

2.1.1 Introduction

La théorie des *équations linéaires* joue un rôle important en algèbre linéaire. En fait de très nombreux problèmes de cette matière se résument à l'étude d'un système d'équations linéaires, par exemple la recherche du noyau d'un homomorphisme d'espace vectoriel et la détermination d'un sous-espace vectoriel donné par un ensemble de vecteurs, la détermination d'une famille libre ou liée, la recherche des vecteurs propres d'une matrice carrée. Parmi les méthodes élémentaires disponibles aux humanités pour la résolution numérique des systèmes linéaires, on trouve les méthodes **de substitution, d'égalisation et d'addition**. Sans méconnaître leur efficacité, nous ne les recommandons pas ici étant donné leurs limites lorsqu'il est question notamment de résoudre un système sans second membre ou un système avec un nombre important des variables inconnues. Ainsi, dans le cadre de ces travaux pratiques, trois méthodes seront proposées, à savoir :

1. la méthode d'élimination de Gauss,
2. la méthode de Cramer et
3. la méthode d'inversion matricielle.

La première convient mieux pour un système d'équations quelconque tandis que les deux dernières ne peuvent être utilisées que lorsque le système à résoudre est cramérien [1]. Dans ce chapitre, nous allons insister sur la première méthode et à la fin du chapitre 4, nous présenterons les deux autres.

2.1.2 Équation linéaire

Définition 2.1
Par équation linéaire, on entend toute expression de la forme

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \text{ ou encore } \sum_{i=1}^{n} a_ix_i = b. \tag{2.1}$$

*où les a_i sont des nombres réels appelés **coefficients** de x_i, b est **le terme constant** ou simplement **la constante** et les x_i représentent **les variables** ou **les inconnues** ou **les indéterminées** de l'équation.*

Un ensemble des nombres $x_1 = k_1$, $x_2 = k_2$, ..., $x_n = k_n$ ou $X = (k_1, k_2, ..., k_n)$ est une solution de l'équation (2.1) si

$$a_1k_1 + a_2k_2 + \cdots + a_nk_n = b.$$

Exemple 2.1
Considérons l'équation

$$2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = 3. \tag{2.2}$$

1. c'est-à-dire lorsque la matrice des coefficients A associée est carrée et non singulière.

* $X = (2, 3, 1, 0)$ *est une solution de* (2.2) *car* $2 \cdot 2 + 3 - 4 \cdot 1 + 0 = 3$.
* $X = (0, 1, 0, 2)$ *est aussi une solution de* (2.2).
* $X = (1, 1, 0, 0)$ *est encore une solution de* (2.2).

Les solutions de l'équation (2.1) peuvent être aisément obtenues. Trois cas sont à envisager :

Cas 1 : Un des coefficients de (2.1) n'est pas nul, par exemple $a_1 \neq 0$. Alors nous pouvons écrire l'équation sous la forme

$$a_1x_1 = b - a_2x_2 - \cdots - a_nx_n \text{ ou } x_1 = a_1^{-1}b - a_1^{-1}a_2x_2 - \cdots - a_1^{-1}a_nx_n. \tag{2.3}$$

En donnant arbitrairement des valeurs déterminées aux inconnues $x_2, \cdots, x_n$, nous obtenons une valeur pour x_1 ; ces valeurs forment une solution de l'équation (2.1). De plus, toute solution de l'équation (2.3) peut être obtenue de cette manière. Remarquons en particulier que l'équation linéaire à une inconnue

$$ax = b \text{ avec } a \neq 0$$

admet une solution unique

$$x = a^{-1}b.$$

Cas 2 : Tous les coefficients de l'équation (2.1) sont nuls, mais le terme constant est différent de zéro. L'équation est alors de la forme

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b. \tag{2.4}$$

L'équation n'a alors pas de solution ; elle est dite **impossible**. $S = \emptyset$

Cas 3 : Tous les coefficients de l'équation (2.1) sont nuls, et le terme constant est nul également. L'équation est de la forme

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0. \tag{2.5}$$

Quel que soit le n-uplet constitué de scalaires de $\mathbb{R}$, il s'agira d'une solution de l'équation ; elle est dite **indéterminée**. $S = \mathbb{R}^n$

2.1.3 Système d'équations linéaires

2.1.3.1 Généralités

Considérons maintenant un système de m équations linéaires à n inconnues $x_1, x_2, \cdots, x_n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{2.6}$$

* Les coefficients a_{ij} et les secondes membres b_i sont des éléments donnés de $\mathbb{R}$. Les inconnues $x_1, x_2, \cdots, x_n$ sont à chercher dans $\mathbb{R}$.
* Le **systeme homogene** associé à (2.6) est le système obtenu en remplaçant les b_i par 0. C.à.d

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{2.7}$$

- ⋆ Une solution de (2.6) est un n-uplet $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ qui vérifie simultanément les équations de (2.6). Résoudre (2.6) signifie chercher toutes les solutions.
- ⋆ Le système (2.7) admet toujours une solution qui est le n-uplet $\mathbf{0} = (0, 0, \cdots, 0)$, appelé solution **triviale** ou **nulle**. N'importe quelle autre solution est appelée **solution non triviale** ou **non nulle**.
- ⋆ Un système est **impossible** ou **incompatible**, s'il n'admet pas de solution. Un système est **possible** ou **compatible**, s'il admet une ou plusieurs solutions.

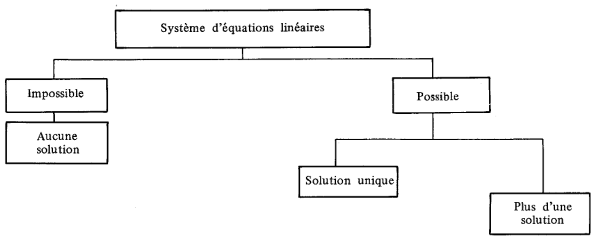


FIGURE 2.1 – Nombre de solutions

- ⋆ Deux systèmes sont **équivalents** s'ils admettent les mêmes solutions.
- ⋆ Le système (2.6) est équivalent à l'écriture matricielle

$$AX = B \text{ où } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

- ⋆ Si on ajoute le vecteur-colonne des seconds membres B à la matrice des coefficients A, on obtient ce qu'on appelle la **matrice augmentée** que l'on note $[A|B]$.

2.1.3.2 Résolution d'un système d'équations linéaires : Méthode ou Procédé d'élimination de Gauss

La règle de Cramer (qu'on verra dans le chapitre 4) convient surtout à la représentation théorique de la solution d'un système linéaire, mais elle devient rapidement très lourde à utiliser en pratique lorsque la dimension n du système dépasse 3 ou 4. Pour la résolution numérique d'un système d'équations linéaires, on utilise la méthode d'élimination de Gauss. Cette méthode, que nous étudions dans cette section, est une des méthodes les plus importantes et les plus fréquemment utilisées en pratique. Comme nous allons le voir, il ne s'agit de rien d'autre que de la formulation systématique de la "méthode de substitution" bien connue. Pour ce faire, considérons le système (2.6) d'équations linéaires. Réduisons-le à un système plus simple de la manière suivante.

Étape 1 : Échanger les équations de telle sorte que la première inconnue x_1 ait un coefficient non nul dans la première équation, ainsi $a_{11} \neq 0$ (appelé **pivot** de l'étape 1).

Étape 2 : Pour chaque $i > 1$, appliquer

$$\boxed{L_i \longrightarrow -a_{i1}L_1 + a_{11}L_i}. \tag{2.9}$$

Nous obtenons alors le système suivant qui est équivalent à (2.6), c'est-à-dire qui a le même ensemble de solutions que (2.6) :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a'_{12}x_2+ & \cdots & +a'_{1n}x_n = b'_1 \\ & a'_{2j_2}x_{j_2}+ & \cdots & +a'_{2n}x_n = b'_2 \\ & \cdots & \cdots & \cdots \\ & a'_{mj_2}x_{j_2}+ & \cdots & +a'_{mn}x_n = b'_n \end{cases} \tag{2.10}$$

où $a_{11} \neq 0$. Ici x_{j_2} représente la première inconnue dont le coefficient est non nul dans une équation autre que la première ; d'après l'étape 2 ; $x_{j_2} \neq x_1$. Ce procédé consistant à éliminer une inconnue à partir des diverses équations successives est appelé **procédé d'élimination ou de Gauss**. En réitérant le procédé, on aboutit à un système **échelonné**.

DÉFINITION 2.2 (SYSTÈME ÉCHELONNÉ)
*Un système (2.6) est en **escalier**, ou **échelonné**, si le nombre de premiers coefficients nuls successifs de chaque équation est strictement croissant. Les inconnues x_i qui n'apparaissent pas au commencement de chaque équation sont appelées des **inconnues libres ou variables libres**.*

Autrement dit, un système est échelonné si les coefficients non nuls des équations se présentent avec une sorte d'escalier à marches de longueurs variables marquant la séparation entre une zone composée uniquement de zéros et une zone où les lignes situées à droite de l'escalier commencent par des termes non nuls, comme dans l'exemple suivant de 5 équations à 6 inconnues :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc}
5x_1 & -x_2 & -x_3 & +2x_4 & & +x_6 & = & b_1 \\
 & & 3x_3 & -x_4 & +2x_5 & & = & b_2 \\
 & & & & -x_5 & +x_6 & = & b_3 \\
 & & & & & 5x_6 & = & b_4 \\
 & & & & & 0 & = & b_5
\end{array}\right.$$

REMARQUE 2.1 (RÉDUCTION)
Quand un système contient une équation du type

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b,$$

(1) *si $b \neq 0$ le système est impossible,*

(2) *si $b = 0$, on peut supprimer cette équation, ce qui conduit à un système équivalent à (2.6) dit **système réduit**.*

Ci après, nous présentons ce théorème d'une importance capitale :

THÉORÈME 2.1
Dans un système réduit à une forme échelonnée où r=nombre d'équations et n=nombre d'inconnues on peut distinguer deux cas :

1. $r = n$: il y a autant d'équations que d'inconnues. Le système admet alors une solution unique.
2. $r < n$: il y a moins d'équations que d'inconnues. Nous attribuerons alors arbitrairement des valeurs aux $n - r$ inconnues libres et nous obtiendrons une solution du système.

2.1.3.3 Solution d'un système homogène d'équations linéaires

THÉORÈME 2.2
Dans un système homogène réduit à une forme échelonnée, on peut distinguer deux cas :

1. $r = n$: Alors le système a seulement la solution nulle.
2. $r < n$: Alors le système a une solution non nulle.

THÉORÈME 2.3
Un système d'équations linéaires homogène avec plus d'inconnues que d'équations admet une solution non nulle.

2.2 Exercices d'application

EXERCICE 2.1
Résoudre :

1. $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 5x+7y=3 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 2x+4y=10 \\ 3x+6y=15 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 4x-2y=5 \\ 6x+3y=1 \end{cases}$.

Exercice 2.2
Résoudre :

1. $\begin{cases} 2x+y-3z=5 \\ 3x-2y+2z=5 \\ 5x-3y-z=16 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 2x+3y-2z=5 \\ x-2y+3z=2 \\ 4x-y+4z=1 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x+2y+3z=3 \\ 2x+3y+8z=4 \\ 3x+2y+17z=1 \end{cases}$.

Exercice 2.3
Résoudre :

1. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=10 \\ 2x_1+3x_2+4x_3+x_4=10 \\ 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=10 \\ 4x_1+x_2+2x_3+3x_4=10 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=1 \\ 2x_1+3x_2+4x_3+x_4=2 \\ 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=3 \\ 4x_1+x_2+2x_3+3x_4=4. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3-x_4+x_5=1 \\ 3x_1-x_2+x_3-4x_4+3x_5=4 \\ x_1+5x_2-9x_3-8x_4+x_5=0 \end{cases}$

Exercice 2.4
Résoudre :

1. $\begin{cases} 2x+3y=3 \\ x-2y=5 \\ 3x+2y=7 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x+2y-3z+2w=2 \\ 2x+5y-8z+6w=5 \\ 3x+4y-5z+2w=4 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x+2y-z+3w=3 \\ 2x+4y+4z+3w=9 \\ 3x+6y-z+8w=10 \end{cases}$.

Exercice 2.5
Résoudre :

1. $\begin{cases} x+2y+2z=2 \\ 3x-2y-z=5 \\ 2x-5y+3z=-4 \\ x+4y+6z=0 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x+5y+4z-13w=3 \\ 3x-y+2z+5w=2 \\ 2x+2y+3z-4w=1 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3+x_4+3x_5=11 \\ x_1+2x_2-x_3-2x_4-2x_5=0 \\ 3x_1+4x_2+x_3+x_4+3x_5=14 \\ 2x_1+2x_2+x_3-x_4+2x_5=5 \\ x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=6 \end{cases}$

Exercice 2.6
Déterminer si chacun des systèmes suivants a une solution non nulle :

1. $\begin{cases} x+3y-2z=0 \\ x-8y+8z=0 \\ 3x-2y+4z=0 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x+3y-2z=0 \\ 2x-3y+z=0 \\ 3x-2y+2z=0 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x+2y-5z+4w=0 \\ 2x-3y+2z+3w=0 \\ 4x-7y+z-6w=0 \end{cases}$

Exercice 2.7
Déterminer si chacun des systèmes suivants a une solution non nulle :

1. $\begin{cases} x-2y+2z=0 \\ 2x+y-2z=0 \\ 3x+4y-6z=0 \\ 3x-11y+12z=0 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 2x-4y+7z+4v-5w=0 \\ 9x+3y+2z-7v+w=0 \\ 5x+2y-3z+v+3w=0 \\ 6x-5y+4z-3v-2w=0. \end{cases}$

Exercice 2.8
Déterminer les valeurs de k de telle sorte que le système d'inconnues x, y , z ait : (i) une solution unique. (ii) aucune solution. (iii) plus d'une solution :

1. $\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + 2y + kz = 1 \\ 2x + ky + 8z = 3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x + y + kz = 2 \\ 3x + 4y + 2z = k \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x - 3z = -3 \\ 2x + ky - z = -2 \\ x + 2y + kz = 1. \end{cases}$

EXERCICE 2.9
Déterminer les conditions sur a, b, c de telle sorte que le système ayant pour inconnues x, y et z ait une solution :

1. $\begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 3x - y + 2z = b \\ x - 5y + 8z = c \end{cases}$

2. $\begin{cases} x - 2y + 4z = a \\ 2x + 3y - z = b \\ 3x + y + 2z = c \end{cases}$

EXERCICE 2.10
La faculté ECOLE DES MINES de l'UOB compte acheter 100 ordinateurs, pour aménager leur bibliothèque, auprès des sociétés locales KOTETCHA, OLIVE et DATCO. Les coûts unitaires de transports sont respectivement 10$, 20$ et 12$; quand les prix unitaires d'achats sont respectivement 300$, 250$ et 350$. Comment cette faculté va-t-elle passer la commande, sachant que le coût global s'élève à 30750$ tandis que le coût global de transport est de 1330$.

EXERCICE 2.11
Deux personnes ont épluché 400 pommes de terre. L'une épluchait trois à la minute et l'autre 2. La seconde personne a travaillé 25 minutes de plus que la première. Combien de temps a travaillé chacune d'elles ?

Chapitre 3

Espaces et sous-espaces vectoriels

Exercice 3.1
Cfr Exercice 1, Crédit 2, p8.

Exercice 3.2
Cfr Exercice 2, Crédit 2, p12.

Exercice 3.3
Les vecteurs $\vec{u}$ sont-ils combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v}_i$?

1. $E = \mathbb{R}^2$, $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v}_1\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}_2\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.
2. $E = \mathbb{R}^2$, $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v}_1\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{v}_2\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}_3\begin{pmatrix}-4\\5\end{pmatrix}$.
3. $E = \mathbb{R}^3$, $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v}_1\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}_2\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}$.
4. $E = \mathbb{R}^3$, $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\\m\end{pmatrix}$, $\vec{v}_1\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}_2\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}$ (discuter suivant la valeur de m).

Exercice 3.4
Les familles suivantes sont-elles libres dans $\mathbb{R}^3$ (ou $\mathbb{R}^4$ pour la dernière famille) ?

1. $\mathcal{F}_1 = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ avec $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\4\\6\end{pmatrix}$
2. $\mathcal{F}_2 = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ avec $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.
3. $\mathcal{F}_3 = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ avec $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}$.
4. $\mathcal{F}_4 = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{z}\}$ avec $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\6\\7\\8\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}9\\10\\11\\12\end{pmatrix}$ et $\vec{z}\begin{pmatrix}13\\14\\15\\16\end{pmatrix}$.

Exercice 3.5
Montrer que les vecteurs $\vec{u}_1\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{u}_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Trouver dans cette base les coordonnées du vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Exercice 3.6
Montrer que $P_1(x) = (x-1)^2$, $P_2(x) = x^2$ et $P_3(x) = (x+1)^2$ forment une base de $\mathbb{R}_2[x]$. Trouver dans cette base les coordonnées du vecteur $Q(x) = x^2 + x + 1$.

Exercice 3.7
Les systèmes suivants forment-ils des bases de $\mathbb{R}^3$?

1. $S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$
2. $S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \right\}$, $a \in \mathbb{R}$. On discutera suivant la valeur de a.
3. $S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \\ e \end{pmatrix} \right\}$ où a, b, c, d, e sont des réels à discuter.
4. $S_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}$.

Exercice 3.8
Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les 3 vecteurs suivants $\vec{v}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. La famille $\mathcal{F} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ est-elle libre ?
2. On pose $H = Vect(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$. Déterminer une base de H et sa dimension.

Exercice 3.9 (Dérivés de polynômes)
On note $R_3[x]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. Soit

$$V = \left\{ P \in \mathbb{R}_3[x] / (x+1)P' - (2-x^2)P'' = 0 \right\}$$

1. Montrer que l'ensemble V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[x]$.
2. En donner une famille génératrice.

Exercice 3.10 (Divertissement ☻)

- ☺ Emile achète pour sa maman une bague contenant 2g d'or, 5g de cuivre et 4g d'argent. Il la paie 6200\$.
- ☺ Paulin achète pour sa sœur une bague contenant 3g d'or, 5g de cuivre et 1g d'argent. Il la paie 5300\$.
- ☺ Frédéric achète pour sa chérie une bague contenant 5g d'or, 12g de cuivre et 9g d'argent. Combien va-t-il payer ?

Exercice 3.11
Trouver une base et la dimension de $Vect(A)$, le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs ci-après de A :

1. $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

2. $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-4\\-2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-3\\-1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}3\\-8\\-2\\7\end{pmatrix}$.
3. $\vec{u}_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\\1\end{pmatrix}$, $\vec{u}_2\begin{pmatrix}2\\1\\3\\1\end{pmatrix}$, $\vec{u}_3\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{u}_4\begin{pmatrix}1\\1\\3\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{u}_5\begin{pmatrix}3\\2\\5\\4\end{pmatrix}$.

Exercice 3.12

1. Soit U et W deux sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ définis par
$$U = \left\{\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} /a = b = c\right\} \text{ et } W = \left\{\begin{pmatrix}0\\b\\c\end{pmatrix}\right\}.$$
(Remarquons que W est le plan yz). Montrer que $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$.
2. Soit V l'espace vectoriel des n matrices carrées sur un corps $\mathbb{R}$. Soient U et W les sous-espaces des matrices symétriques et antisymétriques respectivement. Montrer que $V = U \oplus W$. (La matrice M est symétrique si et seulement si $M = M^t$ et antisymétrique si et seulement si $M^t = -M$).

Chapitre 4

Applications linéaires et opérations sur les matrices

Exercice 4.1

Dire si les applications suivantes sont des applications linéaires :

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+y \\ x-2y \\ 0 \end{pmatrix}$,
2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+y \\ x-2y \\ 1 \end{pmatrix}$,
3. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto x^2 - y^2$.

Exercice 4.2

Soit l'application

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x+2y \\ y \\ x+z \end{pmatrix} \end{array}$$

1. Démontrer qu'elle est une application linéaire.
2. Déterminer une base de son noyau.
3. Déterminer une base de son image.
4. Est-elle injective ?. Est-elle surjective ?
5. Déterminer sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4.3

Soit l'application

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & x+y+z. \end{array}$$

1. Démontrer qu'elle est une application linéaire.
2. Déterminer une base de son noyau.
3. Déterminer une base de son image.
4. Est-elle injective ?. Est-elle surjective ?
5. Déterminer sa matrice relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}$.

EXERCICE 4.4
Soit l'application

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x+y+z \\ x-y+z \\ x+3y+z \end{pmatrix} \end{array}$$

1. Démontrer qu'elle est une application linéaire.
2. Déterminer une base de son noyau.
3. Déterminer une base de son image.
4. Est-elle injective ?. Est-elle surjective ?
5. Déterminer sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

EXERCICE 4.5
Soit l'application $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par :

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-y-z \\ -x+2y+z \end{pmatrix}$$

1. Montrez que f est une application linéaire.
2. Déterminez $Kerf$ et Imf.
3. f est-elle injective ?. Surjective ?. Bijective ?. Justifiez vos réponses.

EXERCICE 4.6
Même question pour l'application $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par :

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+y \\ 2x \\ -y \end{pmatrix}.$$

EXERCICE 4.7
Soient

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1. Trouver
   (a) $A+B$ (b) $A+C$ (c) $3A-4B$
2. Trouver
   (a) AB (b) AC (c) AD (d) BC (e) BD (f) CD.
3. Trouver
   (a) A^t (b) A^tC (c) D^tA^t (d) B^tA (e) D^tD (f) DD^t.

EXERCICE 4.8
Trouver le rang de chacune des matrices :

1. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & -3 & 6 & 13 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 5 \\ 5 & 8 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -7 \\ -6 & 1 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}$. 4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & -2 & 0 & -4 \\ 3 & 8 & -7 & -2 & -11 \\ 2 & 1 & -9 & -10 & -3 \end{pmatrix}$

EXERCICE 4.9
Pour chacune des matrices suivantes, déterminer les valeurs de t pour lesquelles le déterminant est nul.

1. $\begin{pmatrix} t & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} t-2 & -3 \\ -4 & t-1 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} t-5 & 7 \\ -1 & t+3 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} t-2 & 4 & 3 \\ 1 & t+1 & -2 \\ 0 & 0 & t-4 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} t-1 & 3 & -3 \\ -3 & t+5 & -3 \\ -6 & 6 & t-4 \end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 7 & t-5 & 1 \\ 6 & -6 & t+2 \end{pmatrix}$

EXERCICE 4.10
Calculer le déterminant et la comatrice de chacune des matrices (pour les matrices d'ordre 3, utiliser la règle de SARRUS d'une part et celle de LAPLACE d'autre part) :

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 & 4 \\ -5 & 2 & 8 & -5 \\ -2 & 4 & 7 & -3 \\ 2 & -3 & -5 & 8 \end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & 2 & -3 \end{pmatrix}$
6. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 5 & -4 & 7 & -2 \\ 4 & 0 & 6 & -3 \\ 3 & -2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

EXERCICE 4.11
Soient les matrices suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix},$$
$$A_6 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 14 & 14 \end{pmatrix}, A_7 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } A_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Pour tout $i \in \{1, \dots, 8\}$, on demande de (d') :

1. Monter que chaque matrice A_i est inversible.
2. Utiliser d'une part la méthode d'élimination de GAUSS-JORDAN et la méthode d'ajointe classique d'autre part pour déterminer l'inverse de A_i,
3. BONUS ☹
   Vérifier que $A_i A_i^{-1} = A_i^{-1} A_i = I_n$.

EXERCICE 4.12
Utiliser d'une part la méthode de Cramer et d'autre part la méthode d'inversion matricielle pour résoudre le systèmes d'équations linéaires ci-après (Sinon, utiliser la méthode d'élimination de Gauss) :

1. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=1 \\ 2x_1+3x_2+4x_3+x_4=2 \\ 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=3 \\ 4x_1+x_2+2x_3+3x_4=4. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1+x_2+5x_3+x_4=5 \\ x_1+x_2-3x_3-4x_4=-1 \\ 3x_1+6x_2-2x_3+x_4=8 \\ 2x_1+2x_2+2x_3-3x_4=2. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=2 \\ 3x_1+x_2-2x_3=1 \\ 4x_1-3x_2-x_3=3 \\ 2x_1+4x_2+2x_3=4. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 4x_1-x_2+2x_3+x_4=0 \\ 2x_1+3x_2-x_3-2x_4=0 \\ 7x_1-4x_3-5x_4=0 \\ 2x_1-11x_2+7x_3+8x_4=0. \end{cases}$.

EXERCICE 4.13

Considérons les opérateurs linéaires suivants de $\mathbb{R}^2$

$$T_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x-3y\\x+y\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T_2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5x+y\\3x-2y\end{pmatrix} \tag{4.1}$$

et les bases suivantes de $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{e}=\left\{\vec{e}_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\vec{e}_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\} \text{ et } \mathbf{f}=\left\{\vec{f}_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\vec{f}_2\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right\}.$$

1. Trouver les matrices de passage P et Q de $\{\vec{e}_i\}$ à $\{\vec{f}_i\}$ et de $\{\vec{f}_i\}$ à $\{\vec{e}_i\}$ respectivement. Vérifier $Q=P^{-1}$.
2. Montrer que $[\vec{v}]_{\mathbf{e}}=P[\vec{v}]_{\mathbf{f}}$, quel que soit $\vec{v}\in\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que $[T_i]_f=P^{-1}[T_i]_eP$ pour chaque opérateur T_i ci-haut donné.

EXERCICE 4.14
Reprendre l' EXERCICE 4.13 pour les bases

$$\mathbf{e}=\left\{\vec{e}_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\vec{e}_2\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right\} \text{ et } \mathbf{f}=\left\{\vec{f}_1\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},\vec{f}_2\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}\right\}.$$

EXERCICE 4.15
Soit $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par

$$F\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x+y-z\\3x-2y+4z\end{pmatrix}.$$

1. Trouver la matrice de F dans les bases suivantes de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{f}=\left\{\vec{f}_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\vec{f}_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\vec{f}_3\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\} \text{ et } \mathbf{g}=\left\{\vec{g}_1\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},\vec{f}_2\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}\right\}.$$

2. Vérifier que, pour un vecteur quelconque $\vec{v}\in\mathbb{R}^3$, $[F]_f^g[\vec{v}]_f=[F(\vec{v})]_g$.

EXERCICE 4.16
Soit l'application linéaire $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ définie par

$$F\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x-y\\x\\x+2y\end{pmatrix}$$

et les bases de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{e} = \left\{ \vec{e}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ et } \mathbf{f} = \left\{ \vec{f}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{f}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{f}_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\mathbf{e}' = \left\{ \vec{e}_1' \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{e}_2' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ et } \mathbf{f}' = \left\{ \vec{f}_1' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{f}_2' \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{f}_3' \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} :$$

1. Déterminez la matrice de F par rapport aux bases e et f $\left([F]_e^f\right)$, ainsi que celle par rapport aux bases e' et f' $\left([F]_{e'}^{f'}\right)$.
2. Calculez P ; matrice de transition de la base e à la base e' et Q ; celle de la base f à la base f'.
3. Retrouvez la matrice de F par rapport aux bases e' et f' à partir de celle par rapport aux bases e et f et des matrices de transition obtenues aux points précédents (Montrer simplement que $[f]_{e'}^{f'} = Q^{-1}[F]_e^f P$).
4. Soit le vecteur $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ dont les coordonnées dans la base e' sont -1 et 2. Calculez les coordonnées de l'image de $\vec{v}$ par F dans la base f.
5. BONUS ☺ :
Répondez à la sous-question précédente d'une autre manière différente $\left([F]_e^f[v]_e = [F(\vec{v})]_f\right)$.

EXERCICE 4.17
Soit l'application linéaire $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y + 3z \\ x + y - 2z \end{pmatrix}$$

et les bases de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{e} = \left\{ \vec{e}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ et } \mathbf{f} = \left\{ \vec{f}_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{f}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\mathbf{e}' = \left\{ \vec{e'}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{e'}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e'}_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ et } \mathbf{f}' = \left\{ \vec{f}_1' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{f}_2' \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

1. Déterminez la matrice de F par rapport aux bases e et f $\left([F]_e^f\right)$, ainsi que celle par rapport aux bases e' et f' $\left([F]_{e'}^{f'}\right)$.
2. Calculez P ; matrice de transition de la base e à la base e' et Q ; celle de la base f à la base f'.
3. Retrouvez la matrice de F par rapport aux bases e' et f' à partir de celle par rapport aux bases e et f et des matrices de transition obtenues aux points précédents (Montrer simplement que $[f]_{e'}^{f'} = Q^{-1}[F]_e^f P$).
4. Soit le vecteur $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ dont les coordonnées dans la base e' sont 2, 0 et 1. Calculez les coordonnées de l'image de $\vec{v}$ par F dans la base f.
5. BONUS ☺ :
Répondez à la sous-question précédente d'une autre manière différente.

EXERCICE 4.18
Soit l'application linéaire $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$F\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y+t-x\\2x+t\\\frac{1}{2}x-z\end{pmatrix}$$

et les bases de $\mathbb{R}^4$ et de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{e}=\left\{\vec{e}_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\vec{e}_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\vec{e}_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\vec{e}_4\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\text{ et }\mathbf{f}=\left\{\vec{f}_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\vec{f}_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\vec{f}_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\},$$

$$\mathbf{e}'=\left\{\vec{e'}_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix},\vec{e'}_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\vec{e'}_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix},\vec{e'}_4\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}\right\}\text{ et }\mathbf{f}'=\left\{\vec{f'_1}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix},\vec{f'_2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\vec{f'_3}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\},$$

1. Déterminez la matrice de F par rapport aux bases e et f $\left([F]_e^f\right)$, ainsi que celle par rapport aux bases e' et f' $\left([F]_{e'}^{f'}\right)$.
2. Calculez P ; matrice de transition de la base e à la base e' et Q ; celle de la base f à la base f'.
3. Retrouvez la matrice de F par rapport aux bases e' et f' à partir de celle par rapport aux bases e et f et des matrices de transition obtenues aux points précédents (Montrer simplement que $[f]_{e'}^{f'}=Q^{-1}[F]_e^fP$).
4. Soit le vecteur $\vec{v}\in\mathbb{R}^4$ dont les coordonnées dans la base e' sont 1, 1, 1 et 1. Calculez les coordonnées de l'image de $\vec{v}$ par F dans la base f.
5. Bonus ☺ :
   Répondez à la sous-question précédente d'une autre manière différente.

Exercice 4.19
Soient $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ et $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, deux applications linéaires définies par :

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x\\x-3y\end{pmatrix}\text{ et }g\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-y\\2x+3y\\3x\end{pmatrix}$$

1. Déterminez l'expression analytique de $g\circ f$.
2. Soit $B_1=\left\{\vec{b}_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\vec{b}_2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$, une base de $\mathbb{R}^2$, déterminez la représentation matricielle A de f par rapport aux bases B_1 et B_c ($A=[f]_{B_1}^{B_c}$), où B_c est la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
3. Soit $B_2=\left\{\vec{f}_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\vec{f}_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\vec{f}_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$, une base de $\mathbb{R}^3$, déterminez la représentation matricielle B de g par rapport aux bases B_c et $B_2(B=[g]_{B_c}^{B_2})$.
4. Déterminez la représentation matricielle C de $g\circ f$ par rapport aux bases B_1 et B_2 ($C=[g\circ f]_{B_1}^{B_2}$).
5. Bonus ☺
   Donnez une deuxième manière de déterminer C.

Chapitre 5

Initiation à la diagonalisation

Un des grands enjeux de l'algèbre linéaire est de "réduire" les matrices d'endomorphismes, par exemple de les diagonaliser (c'est-à-dire de trouver une base où la matrice de l'endomorphisme est diagonale) lorsque cela est possible. Cela permet de simplifier considérablement certains calculs, comme par exemple **les puissances n-ièmes de ces matrices**, **la résolution des systèmes différentiels linéaires**, etc. On rappelle qu'une matrice carrée symétrique $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est diagonalisable s'il existe une matrice carrée inversible P telle que

$$\Delta = P^{-1}AP \text{ soit une matrice diagonale.}$$

Les colonnes de P sont des vecteurs propres de A qui forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. Les éléments diagonaux de Δ sont les valeurs propres de A.

Exercice 5.1

On considère une matrice carrée $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$:

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
2. Vérifier le célèbre résultat connu sous le nom du Théorème de Cayley-Hamilton.
3. En utilisant la réponse obtenue à la sous-question précédente, déduire immédiatement A^{-1} ; inverse de A.
4. Montrer que la matrice A est diagonalisable.
5. En utilisant la réponse obtenue à la sous-question précédente, calculer immédiatement A^5.

Exercice 5.2

Cfr certains exemples proposés dans le CREDIT 3 d'Algèbre linéaire.

Exercice 5.3

Parmi les matrices ci-dessous, lesquelles sont diagonalisables ?, déterminer leurs puissances quatrièmes :

1. $T = \begin{pmatrix} 0.97 & 0.05 \\ 0.03 & 0.95 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
3. $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
4. $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
5. $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$
6. $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Deuxième partie

Géométrie Analytique

Introduction à la Géométrie Analytique : Guide des Travaux Pratiques

Pr. Dr. **Zihindula Biguru Lucien**

Fronton de l'Académie de Platon

Année académique 2021-2022

0.1 Rapide contrôle théorique

Exercice 1. *Définir :*

- *Un groupe G opérant dans un ensemble A ;*
- *Dans quel cas l'opération d'un groupe G dans un ensemble A est-elle transitive ?*
- *Dans quel cas l'opération d'un groupe G dans un ensemble A est-elle fidèle ?*
- *Quel est, selon vous, l'avantage de disposer des opérations à la fois transitive et fidèle ?*

Exercice 2. *:*
Considérons $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ deux espaces affines associés respectivement aux espaces vectoriels E_1 et E_2. Démontrer que si E_1 et E_2 sont de même dimension alors il existe une bijection f entre $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ dès que l'on fixe un point P_1 dans $\mathcal{E}_1$ et un point P_2 dans $\mathcal{E}_2$.

Exercice 3. *:*
Considérons $\mathcal{E}$ un espace affine associé à un espace vectoriel E et F un sous-espace vectoriel de E.

1. *Démontrer que si $\mathcal{L}$ est une variété affine, image de F par une translation vectorielle alors F est l'unique sous espace vectoriel de E dont $\mathcal{L}$ est l'image par une translation vectorielle.*

2. *Montrer qu'à tout produit scalaire $\varphi : E \times E$ sur E correspond une distance sur $\mathcal{E}$.*

0.2 Exercices et problèmes

Exercice 4. *:*
$ABCD$ est un carré. Les points I et J sont définis par :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \quad \textit{et} \quad \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$$

Démontrer que les droites (DI) et (JC) sont orthogonales.

Exercice 5. *:*
On considère les points $A(6,3), B(1,2)$ et $C(4,2)$.

1. *Déterminer une équation de la hauteur du triangle ABC issue de C.*

2. *Déterminer les coordonnées de l'orthocentre du triangle ABC.*

Exercice 6. *:*
*Répondre par **VRAI** ou **FAUX** en justifiant à la lumière des arguments tirés du cours.*

1. *Le point $A(7,-2,1)$ appartient à la droite d de représentation paramétrique*

$$\begin{cases} x = 4+3t \\ y = 1-3t \\ z = 1-2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

2. *On considère le point $A(-1,2,1)$ et la droite d passant par O et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.*

   ***Il existe une unique droite** δ **orthogonale à** d **et passant par** A.*

3. *La droite passant par* $A(2,-2,0)$ *et de vecteur directeur* $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ *est parallèle au plan d'équation* $x+y+z+1=0$

4. *Les plans* π_1 *et* π_2 *d'équations respectives* $x-y+z=5$ *et* $4x+3y-z-2=0$ *sont perpendiculaires.*

5. *Le plan* π *d'équations* $3x-y-z+1=0$ *peut être rapporté au repère* $(A;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ *avec* $A(0,1,0)$, $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice 7. *:*
Considérons la droite d *passant par le point* $A(2,-3,1)$ *et de vecteur directeur* $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Calculer ensuite les coordonnées du point de percée, s'il existe, de la droite d *dans les plans de repères respectifs* $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, $\left(O;\vec{j},\vec{k}\right)$ *et* $\left(O;\vec{i},\vec{k}\right)$.

Exercice 8. *:*
Déterminer une équation cartésienne du plan pi contenant le point A *et dont* $\overrightarrow{u}$ *est un vecteur normal :*

1. $A(-1,2,0)$ *et* $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
2. $A(0,0,2)$ *et* $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
3. $A(-1,-1,2)$ *et* $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice 9. *:*
Soient $A(-1,1,3)$ *et* $B(1,5,-1)$.
Déterminer une équation du plan médiateur du segment $[A,B]$

Exercice 10. *:*
Soient $A(0,1,1)$, $B(1,0,0)$, $C(-1,2,1)$ *et* $D(0,1,2)$.

Démontrer que les points A, B, C *et* D *sont coplanaires.*

Exercice 11. *:*
On se propose d'étudier une modélisation d'une tour de contrôle de trafic aérien, chargée de surveiller deux routes aériennes représentées par deux droites de l'espace.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ *d'unité* $1km$. *Le plan* $\left(O'\vec{i},\vec{j}\right)$ *représente le sol.*

Les deux routes aériennes à contrôler sont représentées par deux droites d_1 *et* d_2, *dont on connaît des représentations paramétriques* $d_1 \equiv \begin{cases} x = 3+a \\ y = 9+3a \\ z = 2 \end{cases}$ *et* $d_2 \equiv \begin{cases} x = 0.5+2b \\ y = 4+b \\ z = 4-b \end{cases}$ *avec* $a, b \in \mathbb{R}$.

1. *Pourquoi est-ce nécessaire que les droites d_1 et d_2 soient gauches ?*

2. *Prouver que d_1 et d_2 sont gauches.*

3. *On veut installer au sommet S de la tour de contrôle un appareil de surveillance qui émet un rayon représenté par une droite notée δ. Le sommet S a pour coordonnées $(3, 4, 0.1)$.*
   Un technicien affirme qu'il est possible de trouver la direction δ pour que cette droite coupe chacune des droites d_1 et d_2.
   Cette affirmation est-elle vraie ? Dans l'affirmative, trouver une représentation paramétrique de la direction δ du rayon de contrôle de la tour.

Bon travail.
ZIHINDULA BIGURU Lucien
30 Juin 2022

26

Lundi 2 août 2023

UNIVERSITÉ OFFICIELLE DE BUKAVU

PROPÉDEUTIQUE ÉCOLE DES MINES
Cours de Géométrie analytique

EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT SUR LE CHANGEMENT DES REPÈRES D'UN ESPACE AFFINE

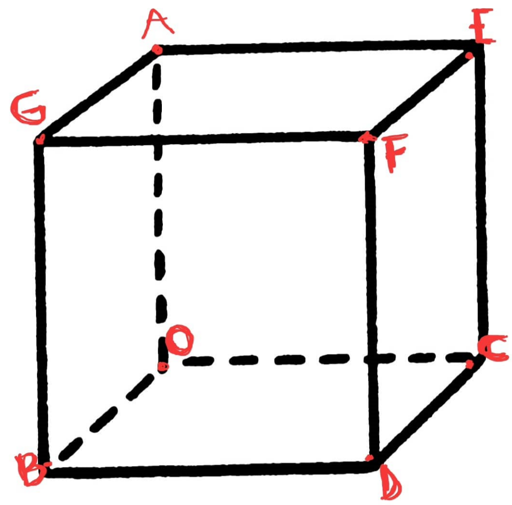
Question 1 (5 points) *Considérons l'espace* $\mathcal{E}_3$ *rapporté au repère* $\mathcal{R} = \left(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right)$. *Soit* W *le point des coordonnées* $(1,1,1)$ *dans* $\mathcal{R}$ *et* $\mathcal{R}'$ *le repère* $\left(W; \overrightarrow{WA}, \overrightarrow{WB}, \overrightarrow{WC}\right)$. *Considérons les points* Z *et* T *des coordonnées respectives* $(2,4,6)$ *et* $(1,3,2)$ *dans le repère* $\mathcal{R}$. *Quelles sont les composantes du vecteur* $\overrightarrow{TZ}$ *dans la base* $\left(\overrightarrow{WA}, \overrightarrow{WB}, \overrightarrow{WC}\right)$ *de* $\mathcal{R}'$ *?*

Question 2 (5 points) *En vous appuyant sur le cube de l'image ci-dessous, considérons l'espace usuel comme l'espace affine* $\mathcal{E}_3$ *muni du repéré* $\mathcal{R} = \left(O; \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}\right)$

1. *Donner les coordonnées de chacun des six sommets de ce cube dans le repèreLe* $\mathcal{R}$ *;*

2. *En considérant un deuxième repère* $\mathcal{R}' = \left(G; \overrightarrow{GB}, \overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GF}\right)$, *répondre à la même question.*

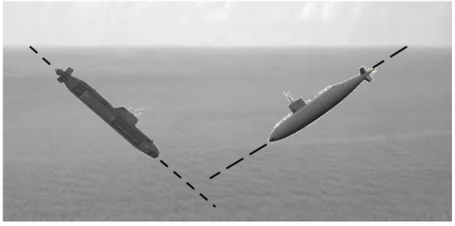
3. *Le point* M *de l'espace a comme coordonnées* $(2,3,-1)$ *dans le repère* $\mathcal{R}$. *Quelles sont les coordonnées de* M *dans le repère* $\mathcal{R}'$ *?*



Pr. Dr. ZIHINDULA BIGURU Lucien

1

EXERCICE 5.4



(a)

(b)

FIGURE 5.1 – Étude des trajectoires de deux sous-marins en phase de plongée.

On observe deux sous-marins se déplaçant chacun en ligne droite et à vitesse constante [FIGURE 5.1 (a)]. À chaque instant t, exprimé en minutes, le premier sous-marin est repéré par le point $M_1(t)$ et le second sous-marin est repéré par le point $M_2(t)$ dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dont l'unité est le mètre. Le plan défini par $(0, \vec{i}, \vec{j})$ représente la surface de la mer. La cote z est nulle au niveau de la mer, négative sous l'eau.

1. On admet que, pour tout réel $t \geq 0$, le point $M_1(t)$ a pour coordonnées : $\begin{cases} x(t) = 140 - 60t \\ y(t) = 105 - 90t \\ z(t) = -170 - 30t \end{cases}$
   (a) Donner les coordonnées du sous-marin au début de l'observation.
   (b) Quelle est la vitesse du sous-marin ?
2. On se place dans le plan vertical contenant la trajectoire du premier sous-marin. Déterminer l'angle α que forme la trajectoire du sous-marin avec le plan horizontal [FIGURE 5.1 (b)]. On donnera l'arrondi de α à 0,1 degré près.
3. Au début de l'observation, le second sous-marin est situé au point $M_2(0)$ de coordonnées (68, 135, -68) et atteint au bout de trois minutes le point $M_2(3)$ de coordonnées $(-202, -405, -248)$. À quel instant t , exprimé en minutes, les deux sous-marins sont-ils à la même profondeur ?

EXERCICE 5.5
Si le temps le permet, on ajoutera d'autres exercices pendant les séances des TP.

....

"La théorie, c'est quand on sait tout et que rien ne fonctionne. La pratique, c'est quand tout fonctionne et que personne ne sait pourquoi. Ici, nous avons réuni théorie et pratique : Rien ne fonctionne... et personne ne sait pourquoi !". Albert Einstein.

☻Fin ☺ ! ! !.

....